Zadania ze Wstępu do Matematyki; Zestaw W7

Sprawdzić metodą zero-jedynkową czy następujące formuły logiczne są tautologiami:

1. $x \vee \neg x$
2. $x \wedge \neg x$
3. $(x \Rightarrow y) \iff (y \Rightarrow x)$
4. $(x \Rightarrow y) \iff (\neg y \Rightarrow \neg x)$
5. $(x \Rightarrow y) \iff (\neg y \Rightarrow x)$
6. $(x \Rightarrow y) \iff (y \Rightarrow \neg x)$
7. $(x \Rightarrow y) \iff (\neg x \vee y)$
8. $(x \Rightarrow y) \iff \neg(x \wedge \neg y)$
9. $\neg x \vee \neg y \vee (x \wedge y)$
10. $(\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y) \vee (x \wedge y)$
11. $(x \iff y) \iff (\neg x \iff \neg y)$
12. $(x \iff \neg y) \iff (\neg x \iff y)$
13. $\neg x \iff (y \Rightarrow x)$
14. $x \Rightarrow (x \vee y)$
15. $x \Rightarrow (x \wedge y)$
16. $(x \vee y) \Rightarrow x$
17. $(x \wedge y) \Rightarrow x$
18. $((x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow z)) \Rightarrow (x \Rightarrow z)$

Podać przykłady formuł zdaniowych φ, takich by spełnione były równości:
Oznaczamy: $B = \{0, 1\} = \{\text{Fałsz}, \text{Prawda}\}$.

19. $\{x \in B \mid \varphi(x)\} = \{0\}$
20. $\{x \in B \mid \varphi(x)\} = \{1\}$
21. $\{x \in B \mid \varphi(x)\} = \{0, 1\} = B$
22. $\{x \in B \mid \varphi(x)\} = \emptyset$
23. $\{(x, y) \in B^2 \mid \varphi(x, y)\} = \{(0, 0), (1, 1)\}$
24. $\{(x, y) \in B^2 \mid \varphi(x, y)\} = \{(1, 0)\}$
25. $\{(x, y) \in B^2 \mid \varphi(x, y)\} = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$
26. $\{(x, y, z) \in B^3 \mid \varphi(x, y, z)\} = \{(0, 0, 0), (1, 1, 1)\}$
27. $\{(x, y, z) \in B^3 \mid \varphi(x, y, z)\} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

Proszę „schować” negacje pod odpowienimi nierównościami. Nie interesuje nas prawdziwość ani fałszywość wyrażeń:

28. $\neg\forall_x x > 3$
29. $\neg\exists_x x \geqslant 3$
30. $\neg\forall_x\exists_y x > 3 \vee y \leqslant x$
31. $\neg\exists_x\forall_y x \geqslant 5 \wedge x < y$
32. $\neg\forall_x\exists_y\forall_z x > z \vee y \geqslant z$
33. $\neg\exists_x\forall_y\exists_z x \geqslant z \wedge z < y$
34. $\neg\exists_x\exists_y\forall_z x = y \wedge y < z$
35. $\neg\forall_x\forall_y\exists_z x = z \vee z > y$
36. $\neg\forall_x\forall_y\forall_z x = z \wedge z = y$

W miejsce $\square$ wstawić $\Rightarrow$ lub $\Leftarrow$ lub $\iff$ tak by otrzymane wyrażenie było prawdziwe dla każdej formuły φ.

37. $\forall_x\forall_y\varphi(x, y) \;\square\; \forall_y\forall_x\varphi(x, y)$
38. $\exists_x\exists_y\varphi(x, y) \;\square\; \exists_y\exists_x\varphi(x, y)$
39. $\exists_x\forall_y\varphi(x, y) \;\square\; \forall_y\exists_x\varphi(x, y)$
40. $\exists_x\varphi(x) \vee \psi(x) \;\square\; \exists_x\varphi(x) \vee \exists_y\psi(y)$
41. $\exists_x\varphi(x) \wedge \psi(x) \;\square\; \exists_x\varphi(x) \wedge \exists_y\psi(y)$
42. $\forall_x\varphi(x) \wedge \psi(x) \;\square\; \forall_x\varphi(x) \wedge \forall_y\psi(y)$
43. $\forall_x\varphi(x) \vee \psi(x) \;\square\; \forall_x\varphi(x) \vee \forall_y\psi(y)$

W następujących wyrażeniach różne zmienne związane zastąpić różnymi symbolami ze zbioru $\{a, b, c, d, e, f, g\}$. Nazwy zmiennych wolnych pozostawić bez zmian:

44. $x > y \vee \forall_x x > y$
45. $x < y \wedge y < z \wedge \exists_y \forall_z y < x + z$
46. $x > z \vee (\forall_x x > y) \vee (\exists_x x < y)$
47. $x = z \vee (\exists_x x > y) \vee (\forall_x x < y) \wedge (\forall_x \exists_z x + y < z)$
48. $xy < z \vee (\exists_x (x > z \vee (\forall_x x < y)))$
49. $zx > y \vee (\forall_x (x > 1 \vee (\exists_x x < z) \vee (\exists_x x > y)))$