# Zadania ze Wstępu do Matematyki; Zestaw W4

Proszę zaznaczyć na osi liczbowej następujące liczby i zbiory:

1. $5$
2. $-3$
3. $\frac{7}{4}$
4. $\sqrt{7}$
5. $[1,3)$
6. $(-4,2)$
7. $[1,\infty)\setminus\{3\}$
8. $[1,3)\cup(4,6]$
9. $(1,5)\cap[3,6]$
10. $(1,15)\setminus(5,10)$

Proszę rozwiązać równania, wskazać zbiór rozwiązań oraz zaznaczyć na osi liczbowej. Z wyjątkiem ostatniego równania należy korzystać z interpretacji modułu jako odległości:

11. $|x|=3$
12. $|x+2|=1$
13. $|x-1|=|x-5|$
14. $|x-3|=0$
15. $|x-2|=-1$
16. $|x+2|+|x+7|=5$
17. $|x-1|+|2x-7|=5$

Proszę rozwiązać nierówności, wskazać zbiór rozwiązań oraz zaznaczyć na osi liczbowej. Należy korzystać z interpretacji modułu jako odległości:

18. $|x|<1$
19. $|x-2|<3$
20. $|x+3|\leqslant 2$
21. $|x+5|\geqslant 3$
22. $|x-1>2$
23. $0<|x-3|<4$
24. $5<|x-5|\leqslant 7$
25. $|x-1|<|x+3|$
26. $|x+2|\geqslant|x-5|+1$
27. $|x+1|-|2x+7|>1$

Proszę zbadać parzystość i nieparzystość funkcji:

28. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^4-3x^3+x^2$
29. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=4x^3-6x$
30. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=5x^2-3$
31. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\log_3(\sqrt{x^2+1})$
32. $f:[-3,4]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3$
33. $f:(-4,4]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2$

34. Proszę obliczyć średnią arytmetyczną, geometryczną i harmoniczną z liczb 4, 6 i 9.
35. Proszę obliczyć średnią ważoną z liczb 5, 4, 3 i 2 z wagami 1, 2, 3 i 4.

Przypomnijmy nierówności pomiędzy średnimi. Dla dowolnych liczb dodatnich $x_i$ oraz $1\leqslant p<q$ mamy:

$$\min\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}\leqslant\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}\leqslant\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}\leqslant\left(\frac{x_1^p+x_2^p+\ldots+x_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant$$
$$\leqslant\left(\frac{x_1^q+x_2^q+\ldots+x_n^q}{n}\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\max\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$$

Proszę wskazać i uzasadnić nierówności pomiędzy podanymi parami liczb. Wszystkie litery oznaczają liczby dodatnie.

36. $\sqrt[3]{abc}\leqslant\frac{a+b+c}{3}$
37. $\frac{3abc}{ab+bc+ac}\leqslant\sqrt[3]{abc}$
38. $\frac{1}{3}(a+b+c)^2\leqslant a^2+b^2+c^2$
39. $\sqrt[3]{ab^2}\leqslant\frac{a+2b}{3}$
40. $\sqrt[4]{ab^3}\leqslant\frac{a+3b}{4}$
41. $6\sqrt[6]{ab^2c^3}\leqslant a+2b+3c$
42. $3\sqrt[3]{(abc)^2}\leqslant ab+bc+ac$

Zadanie dodatkowe dla dociekliwych:

1. $a^2bc + ab^2c + abc^2 \leqslant a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2$