

## Zadania z Analizy Matematycznej, Zestaw A5

11. Dla metryk na płaszczyźnie:

$$d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

$$d_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

$$d_\infty((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

znaleźć odległości pomiędzy parami punktów:

a)  $(1, 1)$  i  $(2, 3)$     b)  $(2, -1)$  i  $(2, 1)$     c)  $(0, 3)$  i  $(1, 4)$

12. Dla metryk z zadania 11 naszkicować kule o środku  $p$  i promieniu  $r$ :

a)  $p = (1, 1)$  i  $r = 1$     b)  $p = (3, 5)$  i  $r = 3$     c)  $p = (-1, 0)$  i  $r = 2$

13. Dla metryk z zadania 11 podać przykład punktu równo oddalonego od obu punktów z przykładów a-c.

14. Znaleźć odległość w metryce supremum  $d(f, g) = \sup |f(x) - g(x)|$  pomiędzy następującymi parami funkcji:

a)  $f, g : (0, 3) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$ ,  $g(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

b)  $f, g : [0, 8] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ ,  $g(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 8$

c)  $f, g : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 3$ ,  $g(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 3$

d)  $f, g : (1, 6) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 8$ ,  $g(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 7$

e)  $f, g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + 2$ ,  $g(x) = e^x$

f)  $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x + 3)e^{-x}$ ,  $g(x) = 3e^{-x}$

g)  $f, g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x + 1) \ln x$ ,  $g(x) = \ln x$

14. Podać przykład funkcji  $h$  takiej, że  $d(h, f) = d(h, g)$ , jeśli  $f(x) = x^2 + 1$  i  $g(x) = e^x$ . Wszystkie funkcje są określone na przedziale  $[0, 5]$ .