Zadania ze Wstępu do Matematyki; Zestaw 11

Proszę obliczyć następujące wyrażenia:

1. $\sum_{i=1}^{55} 2$
2. $\sum_{i=9}^{25} 3$
3. $\sum_{i=1}^{33} (-1)^i 2$
4. $\sum_{i=3}^{27} 3 + (-1)^i 3$
5. $\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$
6. $\sum_{n=1}^{100} \frac{n-1}{n+5} - \frac{n}{n+6}$
7. $\sum_{n=1}^{100} \sin(n+1) - \sin n$
8. $\sum_{n=10}^{99} 7 \log_{10} \frac{n+1}{n}$
9. $\sum_{n=1}^{99} \sin n - \sum_{n=2}^{100} \sin n$
10. $\sum_{n=2}^{100} n^5 - \sum_{n=1}^{99} n^5$
11. $\sum_{n=1}^{100} 3 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n$
12. $\sum_{n=10}^{100} 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$
13. $\sum_{n=1}^{5} 18 \cdot 3^n + \sum_{n=8}^{20} 2 \cdot 3^n$
14. $\sum_{n=0}^{9} 3 \cdot 2^n + \sum_{n=7}^{20} 24 \cdot 2^n$
15. $\sum_{n=2}^{100} \log_{10} n - \sum_{n=1}^{99} \log_{10} n$
16. $\sum_{n=2}^{100} \sin n + \cos(n+1) - \sin(n+1) - \cos n$

Dane są ciągi (a_i) oraz (b_i). Oznaczmy $\bar{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$, $\bar{\bar{a}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2$ oraz $\bar{b} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i$. Proszę obliczyć wyrażenia:

17. $\sum_{i=1}^{n} (a_i - \bar{a})$
18. $\sum_{i=1}^{n} (a_i - \bar{a})^2$
19. $\sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j$
20. $\sum_{i,j=1}^{n} (a_i - \bar{a})(b_j - \bar{b})$

Proszę wykazać za pomocą indukcji matematycznej:

21. n prostych na płaszczyźnie przecina się w co najwyżej $\frac{n(n-1)}{2}$ punktach.
22. $1 + 3 + 5 + \ldots (2n-1) = n^2$
23. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$
24. $1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + 3 \cdot (n-2) + \ldots + n \cdot 1 = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2)$
25. $n^3 + 2n$ jest podzielne przez 3.
26. $n^3 + 3n^2 - 4n$ jest podzielne przez 6.
27. $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$
28. $2\sqrt{n+1} - 2 < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$
29. Zauważyć, że następująca nierówność nie dowodzi się przez indukcję. Dlaczego?
    $2\sqrt{n} - 2 < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$
30. $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n-1} < \frac{2}{3} n\sqrt{n}$
31. Dany jest ciąg a_n, taki że $a_0 = 3$, $a_1 = 5$, oraz rekurencyjnie: $a_{n+1} = 4a_n - 3a_{n-1}$.
    Wykazać, że $a_n = 3^n + 2$.
32. Dany jest ciąg a_n, taki że $a_0 = 2$, $a_1 = 5$, oraz rekurencyjnie: $a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}$.
    Wykazać, że $a_n = 2^n + 3^n$.

33. Dane są ciągi:
a_n, taki że $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, oraz rekurencyjnie: $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-2}$.
b_n, taki że $b_0 = 1$, $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, oraz rekurencyjnie: $b_{n+1} = -a_n + 3a_{n-1} + 2a_{n-2}$.
Wykazać, że $a_n = b_n$.
Wskazówka: wykazać jednocześnie, że $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ *i* $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$.