

Zadania ze Wstępu do Matematyki; Zestaw 3

Proszę wykonać podane działania we wskazanym zbiorze reszt:

1. $9 + 5$ w \mathbb{Z}_{11}
2. $17 + 13$ w \mathbb{Z}_{19}
3. $5 - 11$ w \mathbb{Z}_{19}
4. $33 - 175$ w \mathbb{Z}_{182}
5. $256 + 172$ w \mathbb{Z}_{277}
6. $123 - 752$ w \mathbb{Z}_{777}
7. $6 \cdot 7$ w \mathbb{Z}_{13}
8. $13 \cdot 17$ w \mathbb{Z}_{23}
9. $37 \cdot 46$ w \mathbb{Z}_{47} (jak najprościej uzyskać wynik?)
10. $234 \cdot 583$ w \mathbb{Z}_{584}
11. $3254 \cdot 1234$ w \mathbb{Z}_{3255}
12. $24 \cdot 21$ w \mathbb{Z}_{42}
13. $43 \cdot 53$ w \mathbb{Z}_{123}
14. $70 \cdot 121$ w \mathbb{Z}
15. $\frac{3}{5}$ w \mathbb{Z}_7 (zauważmy, że $\frac{3}{5} = x \iff 3 = 5x$)
16. $\frac{3}{5}$ w \mathbb{Z}_{11}
17. $\frac{3}{5}$ w \mathbb{Z}_9
18. $\frac{7}{3}$ w \mathbb{Z}_9 (czy to działanie jest wykonalne?)
19. $\frac{8}{5}$ w \mathbb{Z}_{16}
20. $\frac{3}{46}$ w \mathbb{Z}_{47}
21. $\frac{10}{53}$ w \mathbb{Z}_{54}
22. $\frac{17}{127}$ w \mathbb{Z}_{128}
23. $\frac{34}{45}$ w \mathbb{Z}_{47}
24. $\frac{38}{55}$ w \mathbb{Z}_{57}

Proszę wykonać podane działania we wskazanym zbiorze reszt:

25. $(1 + x + x^5 + x^7) + (x + x^7 + x^8)$
w $\mathbb{F}_2[x]/1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^9$
26. $(1 + x + x^3 + x^6) - (x + x^4 + x^5)$
w $\mathbb{F}_2[x]/1 + x^2 + x^4 + x^7$
27. $(1 + x)x$
w $\mathbb{F}_2[x]/1 + x^2$
28. $(1 + x^2)(1 + x)$
w $\mathbb{F}_2[x]/1 + x^2 + x^3$
29. $(1 + x^3)(1 + x + x^2)$
w $\mathbb{F}_2[x]/1 + x + x^4$
30. $\frac{x}{1 + x}$
w $\mathbb{F}_2[x]/1 + x + x^2$
31. $\frac{1 + x}{x}$
w $\mathbb{F}_2[x]/1 + x + x^2$
32. $\frac{1 + x}{x^2}$
w $\mathbb{F}_2[x]/1 + x + x^3$
33. $\frac{x^2}{1 + x^2}$
w $\mathbb{F}_2[x]/1 + x^2 + x^3$
34. $\frac{x}{1 + x + x^3}$
w $\mathbb{F}_2[x]/1 + x^3 + x^4$

Proszę znaleźć wszystkie dzielniki zera i elementy odwracalne w następujących zbiorach reszt:

35. \mathbb{Z}_{15}
36. \mathbb{Z}_7
37. \mathbb{Z}_{11}
38. \mathbb{Z}_9
39. $\mathbb{F}_2[x]/x^3$
40. $\mathbb{F}_2[x]/1 + x + x^3$
41. $\mathbb{F}_2[x]/1 + x + x^2 + x^3$
42. $\mathbb{F}_2[x]/1 + x^2 + x^3$

Zadania dodatkowe, dla dociekliwych:

Proszę wskazać, dlaczego następujące równania nie mają rozwiązań w liczbach całkowitych:

$$43. x^2 + 3y + 1 = 0 \quad 44. x^2 + 5y + 3 = 0 \quad 45. x^2 + y^2 + 4z + 1 = 0 \quad 46. x^2 + x + 7y + 3 = 0$$

Proszę rozwiązać następujące równania:

$$47. x^2 + 4x + 1 = 0 \text{ w } \mathbb{Z}_{11} \quad 48. x^2 + x + 3 = 0 \text{ w } \mathbb{Z}_5 \quad 49. x^2 + x + 1 = 0 \text{ w } \mathbb{Z}_7$$

Proszę obliczyć następujące wyrażenia:

$$50. 2^6 \text{ w } \mathbb{Z}_3 \quad 52. 2^{128} \text{ w } \mathbb{Z}_7 \quad 54. 3^{1000} \text{ w } \mathbb{Z}_7$$
$$51. 2^{128} \text{ w } \mathbb{Z}_3 \quad 53. 2^{128} \text{ w } \mathbb{Z}_{15} \quad 55. x^{1000} \text{ w } \mathbb{F}_2[x]/1 + x + x^2$$