

Szeregi liczbowe (3 godz. lek.)

Lista proponowanych zadań do wykonania na ćwiczeniach

Ćwiczenie 1. zadania: 1a), 2a), 3a), 3e), 3f), 3g), 3i), 4a), 4d), 4e), 4g), 4i), 4l).

Szeregi liczbowe

1. Korzystając z definicji szeregu liczbowego, zbadaj jego zbieżność

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$; odp: zbieżny do $\frac{1}{2}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$; odp: rozbieżny.

2. Sprawdź warunek konieczny zbieżności szeregu liczbowego i wyciągnij wniosek

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$; odp: może być zbieżny;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n+1})$; odp: może być zbieżny.

3. Korzystając z wybranego kryterium (całkowego, Cauchy'ego, d'Alemberta, porównawczego, Leibniza), zbadaj zbieżność szeregu liczbowego

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$; odp: rozbieżny;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{n}$; odp: rozbieżny;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$; odp: zbieżny bezwzględnie;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$; odp: zbieżny bezwzględnie;

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{n^2+3n+1}$; odp: rozbieżny;

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n^3-2n+1}$; odp: zbieżny bezwzględnie;

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}$; odp: zbieżny bezwzględnie;

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}$; odp: zbieżny bezwzględnie;

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{2n}}{(2n^2+1)^n}$; odp: zbieżny bezwzględnie;

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$; odp: zbieżny bezwzględnie;

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{n}\right)^n$ odp: zbieżny bezwzględnie.

4. Zbadaj zbieżność bezwzględną/warunkową szeregu liczbowego

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n}{1+n^2}$ odp: zbieżny warunkowo;
- b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln^2 n}$; odp: zbieżny bezwzględnie;
- c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n}{n+1}\right)^n$; odp: rozbieżny;
- d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \sqrt{\ln n}}$; odp: zbieżny warunkowo;
- e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$; odp: zbieżny warunkowo;
- f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+2n}}$; odp: zbieżny warunkowo;
- g) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$; odp: zbieżny warunkowo;
- h) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{4^n}$; odp: rozbieżny;
- i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n}$; odp: zbieżny warunkowo.
- i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$; odp: zbieżny bezwzględnie;
- k) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{2n}}{4^n (n!)^2}$; odp: rozbieżny;
- l) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n^2}$; odp: rozbieżny;
- m) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} 2^n$; odp: zbieżny bezwzględnie.