Pochodne funkcji (9 godz. lek.)
Lista proponowanych zadań do wykonania na ćwiczeniach
1a), 2a), 2b), 2c), 2e), 2g), 2h), 2i), 2j), 2k), 2l),
5a), 5b), 6a), 7b), 8c), 9a), 9b), 9f), 9g),
13a), 14a),15b), 17b), 17c), 17e).

Pochodne funkcji

1. Korzystając z definicji, oblicz pochodną funkcji w punkcie

a) $f(x)=\cos 2x$, $x\in R$; Odp: $f'(x)=-2\sin 2x$.

b) $f(x)=\ln x$, $x\in(0;\infty)$; Odp: $f'(x)=\frac{1}{x}$.

c) $f(x)=\sqrt{4x+1}$, $x_0=2$; Odp: $f'(2)=\frac{2}{3}$.

d) $f(x)=\frac{1}{x+2}, x_o=1$; Odp: $f'(1)=-\frac{1}{9}$.

e) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x & dla \quad x\in(-\infty;1) \\ \sqrt{x}-1 & dla \quad x\in[1;+\infty) \end{cases}$, $x_0=1$; Odp: $f'(1)=f'_-(1)=f'_+(1)=\frac{1}{2}$.

f) $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$, $x_o=1$; Odp: $f'(1)$ - nie istnieje.

2. Wyznacz funkcję pochodną dla funkcji *f*, gdy

a) $f(x)=x^5+3x^{\frac{2}{3}}+x^{-3}+2$;
Odp: $f'(x)=5x^4+x^{-\frac{1}{3}}-3x^{-4}$.

b) $f(x)=tgx-ctgx+4\ln x$;
Odp: $f'(x)=4(\frac{1}{\sin^2 2x}+1)$.

c) $f(x)=x^{-2}e^x$;
Odp: $f'(x)=\frac{x-2}{x^3}e^x$.

d) $f(x)=\ln x\cdot\arcsin x$;
Odp: $f'(x)=\frac{\arcsin x}{x}+\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}$.

e) $f(x)=\frac{\ln x}{1+x^2}$;
Odp: $f'(x)=\frac{1+x^2-2x^2\ln x}{x(1+x^2)^2}$.

f) $f(x)=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$;
Odp: $f'(x)=\frac{2\sin 2x}{1+\sin 2x}$.

g) $f(x)=arctg\sqrt{x}$;
Odp: $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$.

h) $f(x)=\cos^3 x$;
Odp: $f'(x)=-3\cos^2 x\cdot\sin x$.

i) $f(x)=e^{\sin x}$;
Odp: $f'(x)=\cos x\cdot e^{\sin x}$.

j) $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$;
Odp: $f'(x)=\frac{2}{x^2-1}$.

k) $f(x)=arctg(x-\sqrt{1+x^2})$;
Odp: $f'(x)=\frac{1}{2(1+x^2)}$.

l) $f(x)=x^{\sin x}$;
Odp: $f'(x)=x^{\sin x}(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x})$.

3. Wyznacz pierwszą i drugą funkcję pochodną dla funkcji *f*, gdy

a) $f(x)=x\sqrt{1-x^2}+arctg\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;
Odp: $f'(x)=2\sqrt{1-x^2}$.

b) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$;
Odp: $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

c) $f(x)=arctgx-\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;
Odp: $f'(x)=0$.

d) $f(x)=x^x$;

e) $f(x)=\frac{1}{2}x\sqrt{2-x^2}+\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}$;

f) $f(x)=x^{-2}e^x$;

Odp: $f''(x)=x^x[(\ln x+1)^2+\frac{1}{x}]$. Odp: $f'(x)=\sqrt{2-x^2}$. Odp: $f''(x)=\frac{(x-2)(x-3)}{x^4}e^x$.

4. Wykaż, że funkcja $u=u(x)$ spełnia równanie różniczkowe

a) $u(x)=\ln\frac{1}{1+x}$; $xu'+1=e^u$. **b)** $u(x)=\frac{1-e^{-x^2}}{2x^2}$; $xu'+2u=e^{-x^2}$.

c) $u(x)=xe^{-\frac{1}{x}}$; $x^3u''-xu'+u=0$. **d)** $u(x)=e^x\sin x$; $u''-2u'+2u=0$.

5. Znajdź równanie stycznej do wykresu funkcji *f*, gdy $y=f(x)$ w punkcie o odciętej x_o dla

a) $f(x)=\frac{8}{4+x^2}$; $x_o=2$ Odp: $x+2y-4=0$.

b) $f(x)=x+\cos x$; $x_0=\pi$ Odp: $y=x-1$.

c) $f(x)=\arcsin\frac{x-1}{2}$; $x_o=1$ Odp: $y=\frac{1}{2}(x-1)$.

d) $f(x)=arctg\frac{1-x}{1+x}$; $x_o=1$ Odp: $y=-x+1$.

6. Znajdź różniczkę $df(x_0;dx)$ funkcji *f w* punkcie x_0 na przyroście argumentu dx , gdy

a) $f(x)=\ln\frac{1-x^2}{1+x^2}$ dla $x_0=\frac{1}{2}\wedge dx\in R$; Odp: $df(\frac{1}{2};dx)=-\frac{32}{15}dx$.

b) $f(x)=\sqrt{x^2+5}$ dla $x_o=2\wedge dx\in R$; Odp: $df(2;dx)=\frac{2}{3}dx$.

c) $f(x)=arctgx$ dla $x_o=-1\wedge dx=-0{,}1$; Odp: $df(-1:-0{,}1)=-0{,}05$.

7. Oblicz przyrost wartości funkcji $\Delta f(x_0;dx)$ i różniczkę $df(x_0;dx)$ funkcji f w punkcie x_o na przyroście argumentu dx , gdy

a) $f(x)=\sqrt{1+x^3}$ dla $x_o=2\wedge dx=0{,}2$;

Odp: $\Delta f(x_o;dx)=f(x_o+dx)-f(x_o)=0{,}41$;
$df(x_o;dx)=f'(x_o)dx=0{,}4$.

b) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ dla $x_o=-1\wedge dx=-0{,}1$;

Odp: $\Delta f(x_o;dx)=f(x_o+dx)-f(x_o)=-0{,}0475$;
$df(x_o dx)=f'(x_o)dx=-0{,}05$.

8. Korzystając z różniczki funkcji *f*, $f(x_0+dx)\approx f(x_0)+f'(x_0)dx$ oblicz przybliżone wartości liczb

a) $\sqrt[3]{8{,}02}$, Odp: 2,002; **b)** $e^{0{,}03}$, Odp: 1,03 ; **c)** $arctg\,0{,}96$, Odp: 0,765;
d) ln0,97 , Odp: -0,03; **e)** $\sin 31^\circ$, Odp: 0,515 ; **f)** arcsin0,54 , Odp: 0,57.

9. Korzystając z reguły de l'Hospitala, oblicz granice

a) $\lim_{x\to 0}\frac{x-arctgx}{x^2}$, Odp: 0; **b)** $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$, Odp: $\frac{1}{2}$;

c) $\lim_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi}{2}x$, Odp: $\frac{2}{\pi}$; **d)** $\lim_{x\to 0^+}x^2\ln x$, Odp: 0;

e) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$, Odp: $\frac{1}{2}$; **f)** $\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-arctgx}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$, Odp: $\frac{1}{2}$.

g) $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)^{\cos\frac{\pi}{2}x}$, Odp: 1;

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}arctgx\right)^x$, Odp: $e^{-\frac{2}{\pi}}$;

i) $\lim\limits_{x\to 0}[\ln(x+1)]^x$, Odp: 1;

j) $\lim\limits_{x\to 0^+}(ctgx)^{\frac{1}{\ln x}}$, Odp: $\frac{1}{e}$;

k) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}$, Odp: 1;

l) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2\mathrm{x})^{\frac{1}{x^2}}$, Odp: $\frac{1}{e^2}$;

m) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$, Odp: $e^{-\frac{1}{6}}$;

n) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-arctgx\right)^{\frac{1}{\ln x}}$, Odp: $\frac{1}{e}$;

o) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+\cos 3\mathrm{x}}{x+\cos 2\mathrm{x}}$, Odp: 1.

10. Zapisz wzór Taylora (z resztą Lagrange'a) dla funkcji *f*, gdy

a) $f(x)=\frac{1}{x+4}$ w punkcie $x_o=-2$ i dla $n=3$;

Odp: $\frac{1}{x+4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x+2)+\frac{1}{8}(x+2)^2-\frac{1}{[2+\theta(x+2)]^4}(x+2)^3$ dla $x\in(-4;+\infty)$.

b) $f(x)=\sqrt[3]{x^4}$ w punkcie $x_o=1$ i dla $n=4$;

Odp: $\sqrt[3]{x^4}=1+\frac{4}{3}(x-1)+\frac{2}{9}(x-1)^2-\frac{4}{81}(x-1)^3+\frac{5}{243}\frac{1}{\sqrt[3]{[1+\theta(x-1)]^8}}(x-1)^4$ dla $x\in-\infty,+\infty)$.

c) $f(x)=x\cos x$ w punkcie $x_o=\frac{\pi}{2}$ i dla $n=3$;

Odp: dla $x\in(-\infty,+\infty)$ mamy

$$x\cos x=-\frac{\pi}{2}(x-\frac{\pi}{2})-(x-\frac{\pi}{2})^2+\frac{1}{6}[(\frac{\pi}{2}+\theta(x-\frac{\pi}{2}))\sin(\frac{\pi}{2}+\theta(x-\frac{\pi}{2}))-3\cos(\frac{\pi}{2}+\theta(x-\frac{\pi}{2}))](x-\frac{\pi}{2})^3 .$$

d) $f(x)=e^x\sin x$ w punkcie $x_o=0$ i dla $n=4$;

Odp: $e^x\sin x=x+x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}e^{\theta x}\sin(\theta\mathrm{x})x^4$ dla $x\in(-\infty,+\infty)$.

11. Oblicz bezwzględny błąd przybliżenia funkcji wielomianem w podanym przedziale

a) $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$ dla $x\in[0,1]$; Odp: $|R_3(x,0)|=\frac{1}{16}\frac{1}{\sqrt{(1+\theta\mathrm{x})^5}}x^3\le\frac{1}{16}$ dla $x\in[0,1]$.

b) $tgx\approx x+\frac{1}{3}x^3$ dla $|x|\le 0{,}1$;

Odp: $|R_4(x,0)|=\frac{1}{24}\frac{4|\sin(\theta\mathrm{x})|[4+2\sin^2(\theta\mathrm{x})]}{\cos^6(\theta\mathrm{x})}x^4\le 0{,}1^5$ dla $|x|\le 0{,}1$.

c) $\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2$ dla $x\in[0,\frac{1}{2}]$; Odp: $|R_3(x,0)|=\frac{5}{81}\frac{1}{\sqrt[3]{(1+\theta\mathrm{x})^8}}x^3\le\frac{5}{81}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3$.

d) $\cos x\approx 1-\frac{1}{2}x^2$ dla $|x|\le\frac{1}{2}$;

Odp: $|R_4(x,0)|=\frac{1}{4!}|\cos(\theta\mathrm{x})|x^4\le\frac{1}{24}\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{384}$ dla $|x|\le\frac{1}{2}$.

12. Korzystając ze wzoru Taylora, oblicz przybliżoną wartość liczby i oszacuj błąd przybliżenia

a) $\sqrt{4{,}5}$ dla $n=3$;

Odp: $\sqrt{4{,}5}\approx 2+\frac{1}{1!}\cdot\frac{1}{4}\cdot 0{,}5-\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{32}\cdot 0{,}5^2\approx 2{,}12109375$;

$|R_4(4{,}5\,;4)|=\frac{3\cdot 0{,}5^3}{3!\cdot 8\cdot\sqrt{(4+0{,}5\theta)^7}}\leq 0{,}0002442$; ($\sqrt{4{,}5}\approx 2{,}121320344$ - kalkulator).

b) $\ln 1{,}1$ dla $n=4$;

Odp: $\ln 1{,}1\approx 0+\frac{1}{1!}\cdot 0{,}1-\frac{1}{2!}\cdot 0{,}1^2+\frac{2}{3!}\cdot 0{,}1^3=0{,}095333$;

$|R_4(1{,}1\,;1{,}0)|=\frac{6}{4!}\cdot\frac{1}{(1+0{,}1\theta)^4}\cdot 0{,}1^4\leq 0{,}000025$; (ln1,1=0,095310 – kalkulator).

c) $\sin 0{,}3$ dla $n=6$;

Odp: $\sin 0{,}3\approx\frac{1}{1!}\cdot 0{,}3-\frac{1}{3!}\cdot 0{,}3^3+\frac{1}{5!}\cdot 0{,}3^5=0{,}29552025$;

$|R_6(0{,}3\,;0)|=\frac{|\sin(0{,}3\theta)|}{6!}\cdot 0{,}3^6\leq 3\cdot 10^7$, gdyż $\sin(0{,}3\theta)\leq 0{,}3)$;

$(\sin 0{,}3=0{,}29552021\,\text{kalkulator})$.

d) $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ dla $n=5$;

Odp: $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}=1+\frac{1}{1!}(-0{,}25)+\frac{1}{2!}(-0{,}25)^2+\frac{1}{3!}(-0{,}25)^3+\frac{1}{4!}(-0{,}25)^4\approx 0{,}7788086$;

$|R_5(-0{,}25\,;0)|=\frac{e^{-0{,}25\theta}}{5!}0{,}25^5\leq\frac{0{,}25^5}{5!}=8{,}1\cdot 10^6$; $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{e}}=e^{-0{,}25}=0{,}7788008\text{- kalkulator}\right)$.

13. Zbadaj monotoniczność i wyznacz ekstrema funkcji *f*, gdy

a) $f(x)=x^2e^{\frac{1}{x}}$; Odp: $f_{\min}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}e^2$;

malejąca na $(-\infty,0)$ lub $\left(0,\frac{1}{2}\right)$, rosnąca na $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ . .

b) $f(x)=x\ln^2 x$; Odp: $f_{\min}=f(1)=0, f_{\max}=f(e^{-2})=4e^{-2}$;
malejąca na $(e^{-2},1)$, rosnąca na $(0,e^{-2})$ lub $(1,+\infty)$.

c) $f(x)=arctgx-x$; Odp: brak ekstremum; malejąca na $(-\infty,+\infty)$.

14. Korzystając z drugiego warunku dostatecznego na ekstremum, zbadaj, czy funkcja f ma ekstremum w punkcie x_o , gdy

a) $f(x)=2\ln x-x$ dla $x_o=2$; Odp: $f_{\max}=f(2)=2\ln 2-2$.

b) $f(x)=2\cos x+x^2$ dla $x_0=0$; Odp: $f_{\min}=f(0)=2$.

c) $f(x)=2\ln x-x+\frac{1}{x}$ dla $x_o=1$; Odp: brak ekstremum.

15. Wyznacz najmniejszą oraz największą wartość funkcji f na danym odcinku

a) $f(x)=x-3\sqrt[3]{x}$ dla $x\in[-1,8]$; Odp: $f_{\min}=f(8)=-5 \wedge f_{\max}=f(0)=1$.

b) $f(x)=arctg\frac{1-x}{1+x}$ dla $x\in[0,1]$; Odp: $f_{\min}=f(1)=0 \wedge f_{\max}(0)=\frac{1}{4}\pi$.

c) $f(x)=x^2\ln x$ dla $x\in[1,e]$; Odp: $f_{\min}=f(1)=0 \wedge f_{\max}=f(e)=e^2$.

16. Wyznacz punkty przegięcia oraz przedziały wypukłości i wklęsłości wykresu funkcji *f*, gdy

a) $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$; Odp: $f_p=f(\frac{1}{2})=e^{-2}$, wypukła na $(-\infty,0)$ lub $(0,\frac{1}{2})$, wklęsła na $(\frac{1}{2},+\infty)$.

b) $f(x)=x^2\ln x$; Odp: $f_p=f(e^{-\frac{3}{2}})=-\frac{3}{2}e^{-3}$, wklęsła na $(0,e^{-\frac{3}{2}})$, wypukła na $(e^{-\frac{3}{2}},+\infty)$.

c) $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$; Odp: $f_p=f(0)=0$, wypukła na $[-2,0)$, wklęsła na (0,2].

17. Zbadać przebieg zmienności funkcji *f* i naszkicuj jej wykres, gdy

a) $f(x)=(x-\frac{1}{4})e^{\frac{1}{x}}$;

Odp: asymptota pionowa prawostronna o równaniu $x=0$,
asymptota ukośna obustronna o równaniu $y=x+\frac{3}{4}$,
funkcja rosnąca na $(-\infty,0)$ lub $(0,+\infty)$,
$f_p=f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}e^2$, wklęsła na $(-\infty,0)$ lub $(0,\frac{1}{2})$, wypukła na $(\frac{1}{2},+\infty)$.

b) $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

Odp: asymptota pionowa prawostronna o równaniu $x=0$,
asymptota ukośna prawostronna o równaniu $y=0$,
$f_{\max}=f(e^2)=\frac{2}{e}$, funkcja rosnąca na $(0,e^2)$, malejąca na $(e^2,+\infty)$,
$f_p=f(e^{\frac{8}{3}})=\frac{8}{3}e^{-\frac{4}{3}}$, wklęsła na $(0,e^{\frac{8}{3}})$, wypukła na $(e^{\frac{8}{3}},+\infty)$.

c) $f(x)=\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$;

Odp: asymptota pozioma obustronna o równaniu $y=\frac{-\pi}{2}$,
$f_{\max}=f(0)=\frac{\pi}{2}$ - ostrze, funkcja rosnąca na $(-\infty,0)$, malejąca na $(0,+\infty)$,
wypukła na $(-\infty,0)$ lub $(0,+\infty)$.

d) $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$;
Odp: asymptota pionowa prawostronna o równaniu $x=0$,
asymptota ukośna obustronna o równaniu $y=x+1$,
$f_{\min}=f(1)=e$, funkcja rosnąca na $(-\infty,0)$ lub $(1,+\infty)$, malejąca na $(0,1)$,
wklęsła na $(-\infty,0)$, wypukła na $(0,+\infty)$.

e) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$;
Odp: asymptota pionowa prawostronna o równaniu $x=0$,
asymptota pozioma prawostronna o równaiu $y=0$,
$f_{\max}=f(e)=\frac{1}{e}$, funkcja rosnąca na $(0,e)$, malejąca na $(e,+\infty)$,
$f_p=f(e^{\frac{3}{2}})=\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}$, wklęsła na $(0,e^{\frac{3}{2}})$, wypukła na $(e^{\frac{3}{2}},+\infty)$.

f) $f(x)=\frac{1}{2}x+arcctgx$;
Odp: asymptota ukośna lewostronna o równaniu $y=\frac{1}{2}x+\pi$,
asymptota ukośna prawostronna o równaniu $y=\frac{1}{2}x$,
$f_{\max}=f(-1)=-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\pi, f_{\min}(1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\pi$, funkcja rosnąca na $(-\infty,-1)$ lub $(1,+\infty)$,
malejąca na $(-1,1)$,
$f_p=f(0)=\frac{\pi}{2}$, wklęsła na $(-\infty,0)$, wypukła na $(0,+\infty)$.