Granica i ciągłość funkcji. Asymptoty wykresu funkcji (6 godz. lek.)

Lista proponowanych zadań do wykonania na ćwiczeniach
1a), 1c), 2a), 3a), 3b), 3c), 3e), 3h), 3i),
3o), 3p), 3s), 3t), 4a), 4c),
6a), 6d), 6f), 1e), 1f).

Granica i ciągłość funkcji. Asymptoty wykresu funkcji

1. Korzystając z definicji granicy w sensie Heinego, oblicz

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$; Odp: $\dfrac{1}{2}$.

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-1}{(x-1)^2}$; Odp: $-\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to 2_+}\dfrac{1}{x-2}$; Odp: $+\infty$;

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$; Odp: 4.

e) $\lim\limits_{x\to 1_+} e^{\frac{1}{x-1}}$; Odp: $+\infty$.

f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(2^{-x}+1\right)$; Odp: 1.

2. Korzystając z definicji granicy w sensie Heinego, wykaż, że nie istnieje granica

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\sin x$; b) $\lim\limits_{x\to 1} 2^{\frac{1}{x-1}}$; c) $\lim\limits_{x\to 0_+}\sin\dfrac{1}{x}$; d) $\lim\limits_{x\to 0} arctg\dfrac{1}{x}$.

3. 0blicz granice funkcji

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$; Odp: -1.

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$; Odp: $\dfrac{1}{2}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; Odp: $\dfrac{1}{2}$.

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x}\right)$; Odp: $\dfrac{5}{2}$.

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$; Odp: $\dfrac{1}{20}$.

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,2x}{\sin 5x}$; Odp: $\dfrac{2}{5}$.

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3-\sqrt{2x+9}}$; Odp: -9.

h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-2\sin 2x}{4x+3\sin 3x}$; Odp: $-\dfrac{1}{13}$.

i) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x-2\sin 2x}{4x+3\sin 3x}$; Odp: $\dfrac{3}{4}$.

j) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin \pi x}$; Odp: $\dfrac{2}{\pi}$.

k) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}$; Odp: -1.

l) $\lim\limits_{x\to +\infty}\arcsin\dfrac{1-x}{1+x}$; Odp: $-\dfrac{\pi}{2}$.

n) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\sin 2x}$; Odp: $\dfrac{3}{2}$.

o) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$; Odp: e.

p) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{3x^2+2x-1}{3x^2+2}\right)^{x}$; Odp: $e^{\frac{2}{3}}$.

r) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x}{x+3}\right)^{2x^2+1}$; Odp: 0.

s) $\lim\limits_{x\to 0_+}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$; Odp: 0.

t) $\lim\limits_{x\to 0_-}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$; Odp: 1.

u) $\lim\limits_{x \to 1_+} arctg \dfrac{1}{1-x}$; Odp: $\dfrac{-\pi}{2}$. v) $\lim\limits_{x \to 1_-} arctg \dfrac{1}{1-x}$; Odp: $\dfrac{\pi}{2}$.

w) $\lim\limits_{x \to \pi/2_-} \dfrac{2}{1+2^{tgx}}$; Odp: 0 . z) $\lim\limits_{x \to \pi/2_-} \square \dfrac{2}{1+2^{tgx}}$; Odp: 2 .

4. Zbadaj ciągłość funkcji

a) $f(x)=\begin{cases} 2x & dla\, x\in(-\infty;1) \\ x^2 & dla\quad x\in[1;2] \\ 6x^{-1} & dla\, x\in(2;+\infty) \end{cases}$;

Odp: w punkcie $x_0=1$ ciągła lewostronnie, nieciągła prawostronnie; ciągła w punkcie $x_0=2$ i pozostałych punktach dziedziny.

b) $f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & dla\, x\in(-\infty;0) \\ (x-1)^2 & dla\quad x\in[0;2) \\ 4-x & dla\, x\in[2;+\infty) \end{cases}$;

Odp: w punkcie $x_0=2$ ciągła prawostronnie, nieciągła lewostronnie, ciągła w punkcie $x_0=0$ i pozostałych punktach dziedziny.

c) $f(x)=\begin{cases} \cos\dfrac{\pi}{2}x & dla \quad x\in[-1;1] \\ |x-1| & dla \quad x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty) \end{cases}$;

Odp: w punkcie $x_0=-1$ ciągła prawostronnie, nieciągła lewostronnie; ciągła w punkcie $x_0=1$ i pozostałych punktach dziedziny.

d) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+x^4}}{x} & dla \quad x\neq 0 \\ 1 & dla \quad x=0 \end{cases}$;

Odp: w punkcie $x_0=0$ ciągła prawostronnie, nieciągła lewostronnie, ciągła w pozostałych punktach dziedziny.

e) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+3}{x^2+x-6} & dla \quad x\neq -3 \wedge x\neq 2 \\ -\dfrac{1}{5} & dla \quad x=-3 \vee x=2 \end{cases}$;

Odp: nieciągła w punkcie $x=2$, ciągła w punkcie $x=-3$ i pozostałych punktach dziedziny.

f) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2} & dla \quad x\neq 0 \\ 1 & dla \quad x=0 \end{cases}$;

Odp: nieciągła w punkcie $x=0$, ciągła w pozostałych punktach dziedziny.

5. Wykaż, że równanie we wskazanym przedziale ma co najmniej jeden pierwiastek, gdy

a) $x^3-3x+1=0$ dla $x\in(1;2)$; b) $x^5-3x-1=0$ dla $x\in(1;2)$.

6. Wyznacz kierunki asymptotyczne do wykresu funkcji i sporządź ten wykres, gdy

a) $f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}$; .

Odp: asymptoty pionowa obustronna o rów. $x=-1;$ i ukośna obustronna o rów. $y=x-2$.

b) $f(x)=\frac{1}{e^x-1}$;

Odp: asymptoty pionowa obustronna o rów. $x=0$ i pozioma lewostronna o rów. $y=-1$,
i prawostronna o rów. $y=0$.

c) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$;

Odp: asymptoty pozioma lewostronna o rów. $y=-1$ oraz prawostronna o rów. $y=1$.

d) $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$;

Odp: asymptoty ukośna lewostronna o rów. $y=-x+1$ oraz prawostronna o rów. $y=x-1$.

e) $f(x)=\sqrt{x^2-1}$;

Odp: asymptoty ukośna lewostronna o rów. $y=-x$ oraz prawostronna o rów. $y=x$.

f) $f(x)=arctg\frac{x}{1-x}$;

Odp: asymptoty pozioma obustronna o rów. $y=-0{,}25\pi$, $f(1^-)=0{,}5\pi, f(1^+)=-0{,}5\pi$.

g) $f(x)=x-\frac{1}{\sqrt{x}}$;

Odp: asymptoty pionowa prawostronna o rów. $x=0$ i ukośna prawostronna o rów. $y=x$.