Ciągi liczbowe (3 godz. lek.)
Lista proponowanych zadań do wykonania na ćwiczeniach
1a), 1b), 1d), 2a), 2c), 3a), 3b), 3c), 3d), 3e), 3f), 3j), 3k), 3p), 3s).

Ciągi liczbowe

1. Zbadać monotoniczność i ograniczoność ciągu:

a) $a_n=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+5}$; Odp: rosnący i ograniczony.

b) $a_n=\dfrac{n+1}{3n-8}$; Odp: malejący dla $n\geq 3$ i ograniczony.

c) $a_n=\dfrac{2^n}{n!}$; Odp: nierosnący i ograniczony.

d) $a_n=(-1)^n n$; Odp: nie jest monotoniczny i nie jest ograniczony.

e) $a_n=\dfrac{3n^2+5n-3}{n^2+2n}$; Odp: rosnący i ograniczony.

f) $a_n=\dfrac{n^n}{n!}$; Odp: rosnący i ograniczony z dołu.

g) $a_n=\dfrac{2^n+1}{3^n+1}$; Odp: malejący i ograniczony.

2. Korzystając z definicji granicy ciągu wykazać, że

a) $\lim\limits_{n}\dfrac{2n-1}{n+1}=2$;

b) $\lim\limits_{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=0$;

c) $\lim\limits_{n}\left(1-\sqrt{n}\right)=-\infty$;

d) $\lim\limits_{n}\dfrac{2n+3}{3n-4}=\dfrac{2}{3}$;

e) $\lim\limits_{n}\dfrac{n^2+1}{n}=+\infty$

3. Obliczyć granicę ciągu

a) $\lim\limits_{n}\left(n^3-2n^2+1\right)$; Odp: ∞ .

b) $\lim\limits_{n}\dfrac{n^3-2n^2+1}{3n^2+2n+5}$; Odp: $\dfrac{1}{3}$.

c) $\lim\limits_{n}\dfrac{4\cdot 3^n+2\cdot 4^n}{5\cdot(-2)^n-3\cdot 4^n}$; Odp: $-\dfrac{2}{3}$.

d) $\lim\limits_{n}\left(\sqrt{n-1}-\sqrt{n+2}\right)$; Odp: 0 .

e) $\lim\limits_{n}\left(\sqrt{4n^2-2n+3}-2n\right)$; Odp: $-\dfrac{1}{2}$.

f) $\lim\limits_{n}\left(\dfrac{3n+1}{7n-2}\right)^n$; Odp: 0 .

g) $\lim\limits_{n}\left(\sqrt{9n^2+2n}-3n\right)$; Odp: $\dfrac{1}{3}$.

h) $\lim\limits_{n}\dfrac{3\cdot 4^n-5\cdot(-3)^n}{4\cdot 3^n+2\cdot 4^n}$; Odp: $\dfrac{3}{2}$.

i) $\lim\limits_{n}\left(\dfrac{5n-2}{7n-1}\right)^{2n+3}$; Odp: 0 .

j) $\lim\limits_{n}\left(\dfrac{2n-1}{2n+3}\right)^{3n-2}$; Odp: e^{-6} .

k) $\lim_{n}\left(\frac{3n^2+2n-4}{3n^2-1}\right)^n$; Odp: $e^{\frac{2}{3}}$.

l) $\lim_{n}\frac{1+3+7+...+3n-2}{n^2}$; Odp: $\frac{3}{2}$.

m) $\lim_{n}\left(\frac{n-3}{n+2}\right)^{2n+1}$; Odp: e^{-10} .

n) $\lim_{n}\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$; Odp: $\frac{1}{2}$.

o) $\lim_{n}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{3^n}}$; Odp: $\frac{4}{3}$.

p) $\lim_{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$; Odp: 1.

r) $\lim_{n}\sqrt[n]{3n+\sin n}$; Odp:1.

s) $\lim_{n}\sqrt[n]{3^n+2\cdot 4^n+5^n}$; Odp: 5.

t) $\lim_{n}\sqrt{2\cdot 4^n+3\cdot 6^n}$; Odp: 6.

4*. Wykazać, że istnieje granica ciągu określonego rekurencyjnie

a) $a_1=\sqrt{6},\ldots,a_{n+1}=\sqrt{6+a_n}$; Odp: 3.

b) $a_1=3,\ldots,a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{3}{a_n}\right)$; Odp: $\sqrt{3}$.

5. Wykazać, że nie istnieje granica ciągu określonego wzorem

a) $a_n=\frac{(-1)^n n}{2n+2}$; b) $a_n=\sin\frac{n\pi}{2}$; c) $a_n=[1+(-1)^n]n$.