MATEMATYKA zadania domowe dla studentów Ekonomii, rok 2016/17

Zestaw opracowała dr inż. Alina Jóźwikowska

PRACA DOMOWA 1 2015/16EK CIĄGI LICZBOWE

Zad.1

Zbadać monotoniczność ciągu o wyrazie ogólnym

a) $a_n = \frac{n+1}{n^2+1}$ b) $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ c) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

zad.2 Wykazać ograniczoność ciągu o wyrazie ogólnym

a) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ b) $a_n = \sqrt{n^2+2n} - n$

Zad.3 Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym.

1) $a_n = 2n^4 - n^3$ 2) $a_n = 2\sqrt{n} - n$ 3) $a_n = \frac{2n^3}{n^2+4n}$

4) $a_n = \frac{(1-3n)(n-1)}{n^2-2n+1}$ 5) $a_n = \left(\frac{2n+1}{n+3}\right)^4$ 6) $a_n = \sqrt{n^2+2} + \sqrt{n}$

7) $a_n = \sqrt{n^2+2n} - n$ 8) $a_n = \sqrt{3n} - \sqrt{3n+1}$ 9) $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{2n+3}$

10) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-2n}}$ 11) $a_n = \frac{(-4)^n}{3^{n+1}}$ 12) $a_n = \frac{(-1)^n + 3^n}{2^n}$

13) $a_n = \frac{5^n}{3^n + 2^{2n}}$ 14) $a_n = \frac{4\cdot 3^{n+1} + 2\cdot 4^n}{5\cdot 2^n + 4^{n+2}}$ 15) $a_n = \frac{\sqrt[n]{n}}{n+1}$ 16) $a_n = \sqrt[n]{3^{n+1}\cdot 2^n \cdot n^4}$.

Zad.4 Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

1) $a_n = \left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^{2n}$ 2) $a_n = \left(\frac{4n+1}{3n+2}\right)^{2n}$ 3) $a_n = \left(1 - \frac{1}{3n^2}\right)^{6n^2}$

4) $a_n = \left(1 + \frac{4}{3\sqrt{n}}\right)^{\frac{\sqrt{n}}{2}}$ 5) $a_n = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n-3}$ 6) $a_n = \left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^{2n}$

7) $a_n = \left(\frac{n^2+3}{n^2+1}\right)^{2n^2+5}$ 8) $a_n = \left(1 + \frac{3}{2n+3}\right)^{\frac{n}{3}}$

odp:

zad.1 a) malejący, b) rosnący c) niemonotoniczny

zad.2 na przykład **a)** $-1 \le \frac{(-1)^n}{n} \le 1$; **b)** $0 \le \sqrt{n^2+2n} - n \le 2$

zad.3 1) ∞, 2) $-\infty$; 3) ∞; 4) –3; 5) 16; 6) ∞; 7) 1; 8) 0; 9) $-\infty$; 10) $\frac{2}{3}$; 11) nie istnieje; 12) ∞; 13) ∞; 14) 1/8; 15) 0; 16) 6.

zad.4 1) 0; 2) ∞; 3) e^{-2}; 4) $e^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{e^2}$; 5) e^{-2}; 6) e^4; 7) e^4; 8) $\sqrt{e}$.

PRACA DOMOWA 2 2015/16Ek CIĄGI LICZBOWE

Zad.1 Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

1) $a_n = \sqrt[n]{2\cdot 3^n + 4\cdot 7^n}$, 2) $a_n = \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^{2n} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}$, 3) $a_n = \sqrt[n]{2n + \frac{(-1)^n}{n}}$,

4) $a_n = \sqrt[n]{2n + \sin n}$, 5) $a_n = \sqrt[n]{n^{(-1)^n}}$ 6) $a_n = \frac{1+2+3+\ldots+n}{(n+1)^3}$,

7) $a_n = \dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$, 8) $a_n = \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$, 9) $a_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{\binom{n}{2}}$ $n \geq 2$,

10) $\sqrt{n}\left(\sqrt{n+4} - \sqrt{n}\right)$.

Zad.2 (z kalkulatorem)

Bank oferuje lokaty A, B, C.

Na lokacie A oprocentowanie roczne wynosi 2% a kapitalizacja co rok.

Na lokacie B oprocentowanie roczne wynosi 1,92% a kapitalizacja raz na pół roku.

Na lokacie C oprocentowanie roczne wynosi 1,84% a kapitalizacja co miesiąc.

Obliczyć roczne czynniki oprocentowujące dla poszczególnych lokat.

Która z lokat oferuje najkorzystniejsze warunki oszczędzanie w okresie 4-lat?

Odp:

Zad.1

Wsk. 1-5 zastosować tw. o trzech ciągach

przypomnieć wzory na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i geometrycznego.

1) 7; 2) $\frac{4}{9}$; 3) 1; 4) 1; 5)1 6) 0; 7) 4; 8) 0; 9) $\sqrt{e}$; 10) 2.

Zad.2

A 1,02, B 1,01929, C 1,01856. Lokata A.

PRACA DOMOWA 3 2015/16EK

zad.1 zadanie powtórzeniowe ze szkoły średniej

Sporządzić wykresy funkcji, określić ich dziedziny i zbiory wartości.

a) $f(x)=3^{-x+2}-1$, b) $f(x)=\dfrac{3-x}{4+x}$, c) $f(x)=\log_{10}|x|$, d) $f(x)=\log_{\frac{1}{4}}(-x)$, e) $f(x)=1-\left|x-x^2\right|$.

Na podstawie wykresu funkcji umieć określić jej własności (różnowartościowość, ograniczoność, monotoniczność, parzystość, nieparzystość).

zad.2 Podać wzór i dziedzinę funkcji złożonych $g\circ h$ oraz $h\circ g$, jeżeli

a) $h(x)=\log_{10}x$, $g(x)=\frac{x+1}{x}$,

b) $h(x)=\pi x$, $g(x)=\sin x$,

c) $h(x)=\frac{1}{x^2}$, $g(x)=3^x$.

zad.3 Wyznaczyć wzór, dziedzinę i zbiór wartości funkcji odwrotnych do funkcji

a) $f(x)=\sqrt{2x+16}$, b) $f(x)=1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$, c) $f(x)=1+\log_2(x+3)$.

Naszkicować wykresy funkcji f, f^{-1} w jednym układzie współrzędnych.

Zad.4 Obliczyć podane granice. Wyniki zilustrować graficznie. Wyciągnąć wnioski o asymptotach funkcji $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

a) $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$, b) $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}$, c) $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{\frac{1}{x}}$, d) $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}}$.

Zad.5 Wyznaczyć asymptoty funkcji $f(x)=\log_{10}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$. Podać interpretację geometryczną obliczonych granic.

Zad.6 Obliczyć granice. Wyniki zilustrować graficznie.

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\ln x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

odpowiedzi

zad.2

a) $f(x)=g[h(x)]=\dfrac{\log_{10}x+1}{\log_{10}x}$; $D_f=(0,1)\cup(1,\infty)$; $t(x)=h[g(x)]=\log_{10}\frac{x+1}{x}$ $D_t=(-\infty,-1)\cup(0,\infty)$

b) $f(x)=g[h(x)]=\sin\pi x$; $D_f=R$; $t(x)=h[g(x)]=\pi\sin x$ $D_t=R$

c) $f(x)=g[h(x)]=3^{\frac{1}{x^2}}$; $D_f=R\setminus\{0\}$; $t(x)=h[g(x)]=\dfrac{1}{\left(3^x\right)^2}=\dfrac{1}{9^x}$, $D_t=R$

zad.3 a) $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(x^2-16)$ $D_{f^{-1}}=\langle 0,\infty)$, $W_{f-1}=\langle -8,+\infty)$;

b) $f^{-1}(x)=\log_{2/3}(1-x)$, $D_{f^{-1}}=(-\infty,1)$ $W_{f-1}=R$;

c) $f^{-1}(x)=2^{x-1}-3$ $D_{f^{-1}}=R$, $W_{f-1}=(-3,+\infty)$

Zad.4 a)0, b) $+\infty$ 0, c)1, d) 1 asymptota pozioma $y=1$, asymptota pionowa prawostronna $x=0$.

Zad.5 asymptota pozioma $y=0$, asymptota pionowa lewostronna $x=-1$. asymptota pionowa prawostronna $x=1$

Zad.6 a) 0, b) $-\infty$.

PRACA DOMOWA4 2015/16EK CIĄGŁOŚĆ FUNKCJI

Zad.1

Dla podanych funkcji złożonych wyznaczyć dziedzinę oraz wzory funkcji elementarnych, z których złożona jest dana funkcja

a) $f(x)=2^{\sqrt{\frac{x^3}{1-x^2}}}$ b) $f(x)=2\log_2^3\left(4-\sqrt{x}\right)$ c) $f(x)=\arcsin\frac{2x}{x^2+1}$

Zad.2

Dobrać wartości parametru *a*, tak aby funkcja była ciągła w swojej dziedzinie. Wykonać jej wykres.

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+4} & dla\ \ x\ge -3\\ -\frac{1}{2}x+a & dla\ x<-3\end{cases}$$

Zad.3 Wyznaczyć, o ile jest to możliwe, wartość stałej *a* tak, aby funkcja była ciągła

$$f(x)=\begin{cases}arctg\frac{1}{x-1} & dla\quad x\ne 1\\ a\quad dla & x=1\end{cases}.$$

Zad.4 Dobrać wartości parametrów *b, c*, aby otrzymać funkcję ciągłą w R

$f(x)=\begin{cases}\left|x^3-1\right| & dla\quad x\le -1\vee x\ge 1\\ c-bx-x^2 & dla\quad -1<x<1\end{cases}$. Dla dobranych parametrów naszkicować wykres tej funkcji.

ZASTOSOWANIE WŁASNOŚCI DARBOUX

Zad.5 $f(x)=\log_{\sqrt{2}}\frac{x+1}{x-2}-\sqrt{x}$ **.** Korzystając z własności Darboux rozstrzygnąć, czy równanie $f(x)=0$ ma rozwiązanie należące do przedziału $(3,5)$.

Zad.6

Uzasadnić, że funkcja $f(x)=\arccos\frac{1-2x}{x+2}$ w przedziale $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ przyjmuje wartość $w=\sqrt{2}$.

Zad.7 a) Czy istnieje $x\in(0,1)$ takie, że $2^{\sqrt{x}}=4x$?

b) Czy istnieje $x\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ takie, że $2^{\sqrt{x}}=4x$?

Zad.8

Wykazać, że wielomian $w(x)=x^3-3x^2+3x+1$ ma pierwiastek w przedziale $(-1,0)$.

Wyznaczyć przedział o długości $\frac{1}{4}$, w którym znajduje się ten pierwiastek.

Zad.9

Wyznaczyć przedziały o długości co najwyżej ½ , w których znajdują się pierwiastki równań

a) $x^5+5x^3+1=0$ b) $x^4-4x^3+x^2-3=0$.

odpowiedzi

zad.1

a) $t(x)=\frac{x^3}{1-x^2}$, $g(x)=\sqrt{x}$, $h(x)=2^x$, $f=h\circ g\circ t$ $D_f=(-\infty,1)\cup\langle 0,1)$

b) $t(x)=4-\sqrt{x}$, $g(x)=\log_2 x$, $h(x)=2x^3$ $f=h\circ g\circ t$ $D_f=\langle 0,16)$

c) $g(x)=\frac{x}{x^2+1}$, $h(x)=\arcsin x$, $f=h\circ g$ $D_f=R$

Funkcję nazywamy *wymierną*, jeżeli można ją przedstawić w postaci ilorazu dwóch wielomianów. Funkcje *t* z przykładu a) oraz *g* z przykładu c) to funkcje wymierne.

Zad.2 $a=\frac{5}{2}$

Zad.3 $\lim_{x\to 1}f(x)$ nie istnieje,(różne są granice jednostronne w punkcie 1), zatem nie da się wyznaczyć takiego *a*, by funkcja była ciągła .

Zad.4 $b=1,\ c=2$.

Zad.5 istnieje $x_0 \in (3,5)$, takie, że $f(x_0) = 0$.

Zad.6 Dziedzina przedział $\left\langle \frac{1}{3}, 3 \right\rangle$, $f(0) = \frac{\pi}{3}$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{2}$, $\sqrt{2} \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right)$.

Zad.7 a) tak, **b)** tak.

Zad.8 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4} \right)$.

Zad.9 a) $\left(-1, -\frac{1}{2} \right)$ b) $\left(-1, -\frac{1}{2} \right)$; $\left(3\frac{1}{2}, 4 \right)$.

PRACA DOMOWA 5 OBLICZANIE POCHODNYCH 2015/16

Zad.1

Obliczyć iloraz różnicowy funkcji $f(x)=\frac{1}{x^2}$ w punkcie $x_0=2$, dla przyrostu argumentu $\Delta x=-\frac{1}{2}$.

Podać interpretację geometryczną.

Obliczyć z definicji pochodną funkcji $f(x)=\frac{1}{x^2}$ w punkcie $x_0=2$. Podać interpretację geometryczną.

Zad.2 Obliczyć z definicji pochodną funkcji

a) $f(x)=\sqrt{4x+1}$ w punkcie $x_0=2$, b) $f(x)=x^4$ w punkcie $x_0\in R$,

c) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ w punkcie $x_0>0$, d) $f(x)=\frac{1}{1-x}$ w punkcie $x_0=3$.

Zad.3 Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji

a) $f(x)=\cos x$ w punkcie o odciętej $x_0=\frac{\pi}{2}$,

b) $f(x)=\ln x$ w punkcie o odciętej $x_0=1$,

c) $f(x)=x^3$ w punkcie o odciętej $x_0=0$,

d) $f(x)=\arcsin x$ w punkcie o odciętej $x_0=0$.

Naszkicować wykres funkcji i tę styczną.

Zad.4 Obliczyć pierwszą pochodną funkcji stosując reguły różniczkowania

1) $f(x)=3x^5-2x^3+4x^2-8x+2$, 2) $f(x)=x\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2}$, 3) $f(x)=\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2}}$,

4) $f(x)=\sqrt{x}\log x$, 5) $f(x)=x^3\cos x$, 6) $f(x)=2^x\sin x$,

7) $f(x)=\frac{x^3+1}{2x-3}$, 8) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\ln x}$, 9) $f(x)=\ln x+\frac{1}{\ln x}$.

Zad.5 Obliczyć pierwszą pochodną funkcji (funkcje złożone)

1. $f(u)=u\arcsin\sqrt{u}$, 2. $f(w)=\log_3\left(w+\frac{2}{w}\right)$, 3. $f(t)=\frac{1}{tg^2 t}$,

4. $f(x)=3x\cdot 10^{\sin 3x}$, 5. $f(u)=\frac{e^{-u^2}}{u^2}$, 6. $f(x)=arctg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$,

7. $f(t)=\cos^2 t\cdot\sin t^2$, 8. $f(x)=(\ln x)^3-3\ln x$, 9. $f(x)=x^2e^{\frac{1}{x}}$,

10. $f(x)=x^3e^{-4x}$, 11. $f(x)=x\sqrt{4x-x^2}$, 12. $f(x)=arctg\frac{1}{x}$.

Zad.6 Obliczyć przybliżoną wartość wyrażeń zastępując przyrost odpowiednio dobranej funkcji jej różniczką zupełną

a) $\ln 0{,}99$ b) $e^{0,03}$ c) $\arcsin 0{,}51$.

ODPOWIEDZI

Zad.1 $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f\left(\frac{3}{2}\right)-f(2)}{-\frac{1}{2}}=-\frac{7}{18}$, $f'(2)=-\frac{1}{4}$.

Zad.2 a) $\frac{2}{3}$, **b)** $f'(x_0)=4x_0^3$, **c)** $f'(x_0)=-\frac{1}{2x_0\sqrt{x_0}}$, **d)** $f'(x)=\frac{1}{4}$.

Zad.3 a) $y=\frac{\pi}{2}-x$ **b)** $y=x-1$, **c)** $y=0$, **d)** $y=x$.

Zad.4

2) $f'(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x}+\frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$, 3) $f'(x)=\frac{5}{3x^2\sqrt[3]{x^2}}$,

4) $f'(x)=\frac{\ln 10\cdot\log x+2}{2\ln 10\sqrt{x}}$, 5) $f'(x)=x^2(3\cos x-x\sin x)$,

6) $f'(x)=2^x(\ln 2\sin x+\cos x)$, 7) $f'(x)=\frac{4x^3-9x^2-2}{(2x-3)^2}$,

8) $f'(x)=\frac{\ln x-2}{2\sqrt{x}(\ln x)^2}$, 9) $f'(x)=\frac{(\ln x)^2-1}{x(\ln x)^2}$.

Zad.5

1. $f'(u)=\arcsin\sqrt{u}+\frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{1-u}}$, 2. $f'(w)=\frac{1}{\ln 3}\frac{w^2-2}{(w^2+2)w}$ 3. $f'(t)=\frac{-2\cos t}{\sin^3 t}$,

4. $f'(x)=3\cdot 10^{\sin 3x}(1+3\ln 10\cdot x\cdot\cos 3x)$ 5. $f'(u)=-2e^{-u^2}\frac{u^2+1}{u^3}$, 6. $f'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$,

7. $f'(t)=2\cos t(t\cos t\cos t^2-\sin t\sin t^2)$, 8. $f'(x)=3\frac{\ln^2 x-1}{x}$, 9. $f'(x)=e^{\frac{1}{x}}(2x-1)$, 10. $f'(x)=e^{-4x}x^2(3-4x)$, 11. $f'(x)=\frac{2x(3-x)}{\sqrt{4x-x^2}}$, 12. $f'(x)=\frac{-1}{1+x^2}$.

Zad.6

a) $\frac{-1}{100}$ b) $\frac{103}{100}$ c) $\frac{\pi}{6}+\frac{1}{50\sqrt{3}}$.

PRACA DOMOWA 6 EK 2015/16

Zad. 1 Wyznaczyć dziedzinę, przedziały monotoniczności oraz ekstrema funkcji

1. $f(x)=\sqrt{x}(\ln x)^2$ 2. $f(x)=x\ln^3 x$ 3. $f(x)=-\ln^3 x+3\ln x$

4. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{\ln x}}$ 5. $f(x)=e^{\frac{x}{x-1}}$ 6. $f(x)=x\sqrt{4x-x^2}$

7. $f(x)=e^{\frac{1}{x^2(x+1)}}$ 8. $f(x)=\dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$ 9. $f(x)=e^{-2(x-1)^2}$

Zad.2 Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji *f* w podanym przedziale

a) $f(x)=\sqrt{x}(\ln x)^2$ w przedziale $\langle e^{-2},e\rangle$

b) $f(x)=-\ln^3 x+3\ln x$ w przedziale $\langle \frac{1}{e},e^2\rangle$

c) $f(x)=\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$ w przedziale $\langle -2,-\frac{1}{4}\rangle$.

Uwaga. Pochodne funkcji obliczone w zadaniu 1.

Zad.3

Koszt wykonania prac w firmie jest funkcją liczby *x* zatrudnionych osób $k(x)=0{,}4x^2-20\ln x+100$.
Przy jakiej liczbie pracowników koszt wykonania prac jest najmniejszy i ile on wynosi ?

Zad.4

Miesięczna sprzedaż S (w tys. sztuk) pewnego towaru wyraża się wzorem $S(t)=\dfrac{100t}{t^2+25}$, gdzie *t* oznacza liczbę miesięcy, która upłynęła od rozpoczęcia sprzedaży. Po ilu miesiącach sprzedaż osiągnie największą wartość? Ile tys. sztuk wyniesie największa wartość sprzedaży?

Zad.5

Zysk z zależy od wielkości nakładów na reklamę według wzoru $z(x)=60x^2e^{\frac{-x}{3}}$, gdzie x nakłady w tys. zł., z – zysk w tys. zł. Ile należy przeznaczyć na reklamę by osiągnąć jak największy zysk?

Zad.1

1. $f'(x)=\dfrac{\ln x(\ln x+4)}{2\sqrt{x}}$, $f_{\min}(1)=0$, $f_{\max}\left(e^{-4}\right)=\dfrac{16}{e^2}$,

Funkcja rosnąca w przedziałach, $(0,e^{-4})$, $(1,\infty)$, funkcja malejąca w przedziale $(e^{-4},1)$.

2 $f'(x)=3\ln^2 x+\ln^3 x=\ln^2 x(3+\ln x)$

Funkcja malejąca w przedziale $(0,e^{-3})$, funkcja rosnąca w (e^{-3},∞), $f_{\min}\left(\dfrac{1}{e^3}\right)=-\dfrac{27}{e^3}$.

3. $f'(x)=\dfrac{3(1-\ln^2 x)}{x}$, $f_{\max}(e)=2$, $f_{\min}(\dfrac{1}{e})=-2$

Funkcja rosnąca w przedziale (e^{-1},e), funkcja malejąca w przedziałach $(0,e^{-1})$, (e,∞).

4 $f'(x)=\dfrac{2\ln x-1}{2\sqrt{\ln x}\ln x}$, $D_f=(1,\infty)$, $f_{\min}\left(\sqrt{e}\right)=\sqrt{2e}$,

funkcja malejąca w przedziale $(1,\sqrt{e})$, rosnąca w przedziale $(\sqrt{e},\infty)$.

5. $f'(x)=-e^{\frac{x}{x-1}}\dfrac{1}{(x-1)^2}$ $D_f=(-\infty,1)\cup(1,\infty)$

funkcja malejąca w przedziałach $(-\infty,1)$ oraz $(1,\infty)$ brak ekstremów

6. $f'(x)=\dfrac{2x(3-x)}{\sqrt{4x-x^2}}$ $D_f=\langle 0,4\rangle$, $D_{f'}=(0,4)$

Funkcja rosnąca w przedziale $(0,3)$, funkcja malejąca w przedziale $(3,4)$, $f_{\max}(3)=3\sqrt{3}$.

7. $f'(x) = -e^{\frac{1}{x^2(x+1)}} \frac{3x+2}{x^3(x+1)^2}$, $f_{\min}(-\frac{2}{3}) = e^{\frac{27}{4}}$,

Funkcja malejąca w przedziałach $(-\infty,-1)$, $\left(-1,-\frac{2}{3}\right)$, $(0,\infty)$, funkcja rosnąca w przedziale $\left(-\frac{2}{3},0\right)$.

8. $f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \frac{x+1}{x}$, $D_f = (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$, $f_{\min}(-1) = -\frac{1}{e}$

Funkcja malejąca w przedziałach $(-\infty,-1)$, $(0,\infty)$,funkcja rosnąca w przedziale $(-1,0)$.

9. $f'(x) = -4e^{-2(x-1)^2}(x-1)$

Funkcja rosnąca w przedziale $(-\infty,1)$, funkcja malejąca w przedziale $(1,\infty)$.

$f_{\max}(1) = 1$.

Zad.2

a) $\min\limits_{\langle e^{-2},e\rangle} f(x) = f(1) = 0$, $\max\limits_{\langle e^{-2},e\rangle} f(x) = f(e) = \sqrt{e}$,

b) $\min\limits_{\langle \frac{1}{e},e^2\rangle} f(x) = f(\frac{1}{e}) = f(e^2) = -2$, $\max\limits_{\langle \frac{1}{e},e^2\rangle} f(x) = f(e) = 2$.

c) $\min\limits_{\langle -2,-\frac{1}{4}\rangle} f(x) = f(-1) = -\frac{1}{e}$, $\max\limits_{\langle -2,-\frac{1}{4}\rangle} f(x) = f(-\frac{1}{4}) = -\frac{4}{e^4}$.

Zad.3

Najniższe koszty przy zatrudnieniu 5 pracowników wynoszą $110 - 20\ln 5 \approx 77{,}8$

Zad.4

Po 5 miesiącach sprzedaż osiągnie największą wartość 10 tys.sztuk.

Zad.5

Największe zyski przy nakładach 6 tys. zł wyniosą $\frac{2160}{e^2} \approx 292{,}3$

PRACA DOMOWA 7 BADANIE FUNKCJI 2015/16

Zad.1 Wyznaczyć punkty przegięcia, przedziały wklęsłości oraz przedziały wypukłości funkcji

a) $f(x)=(x-1)e^{\frac{1}{x}}$, b) $f(x)=arctg\frac{1}{x}$.

Zad.2 Wyznaczyć tempo zmian wartości funkcji $f(x)=\frac{x}{\ln^2 x}$.

Zad.3 Dla funkcji $f(x)=x^4e^{-3x}$ wyznaczyć

a) przedziały , w których funkcja rośnie i jest wypukła ("$\cup$"),

b) przedziały, w których funkcja maleje i jest wklęsła ("$\cap$").

Zad.4 Zbadać przebieg zmienności funkcji, naszkicować jej wykres.

1. $f(x)=\sqrt{x}\ln x$ 2. $f(x)=\frac{1}{\ln x}$ 3. $f(x)=x^2e^{-x}$ 4. $f(x)=e^{-2(x-1)^2}$.

odpowiedzi

Zad.1 a) $f''(x)=-e^{\frac{1}{x}}\frac{x+1}{x^4}$; punkt przegięcia $\left(-1,\frac{-2}{e}\right)$; funkcja wypukła w przedziale $(-\infty,-1)$; wklęsła w przedziałach $(-1,0)$ oraz $(0,\infty)$.

b) $f''(x)=\frac{2x}{(1+x^2)^2}$; brak punktów przegięcia, funkcja wklęsła w przedziale $(-\infty,0)$; wypukła w przedziale $(0,\infty)$.

Zad.2 $f'(x)=\frac{\ln x-2}{\ln^3 x}$, $f''(x)=\frac{6-2\ln x}{x\ln^4 x}$;

w przedziale $(0,1)$ funkcja rośnie coraz szybciej ; w przedziale $(1,e^2)$ funkcja maleje coraz wolniej; w przedziale (e^2,e^3) funkcja rośnie coraz szybciej; w przedziale (e^3,∞) funkcja rośnie coraz wolniej.

Zad.3 $f'(x)=e^{-3x}(4-3x)x^3$, $f''(x)=3e^{-3x}(3x^2-8x+4)x^2=3e^{-3x}(3x-2)(x-2)x^2$.

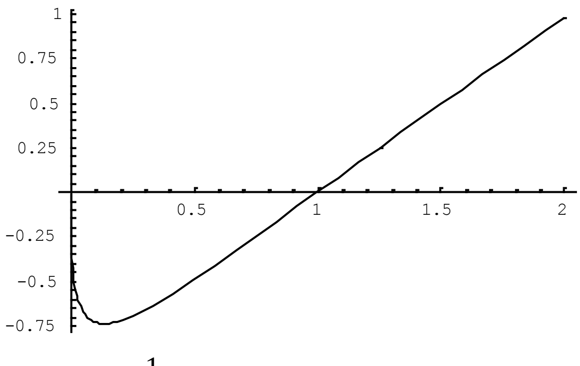
Funkcja maleje i jest wypukła w przedziałach $(-\infty,0)$ oraz $(2,\infty)$.

Funkcja rośnie i jest wklęsła w przedziale $(\frac{2}{3},\frac{4}{3})$.

Zad.4

1) $f(x)=\sqrt{x}\ln x$; $D_f=(0,+\infty)$, $f(1)=0$, $\lim_{x\to 0+}f(x)=0$, $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$,

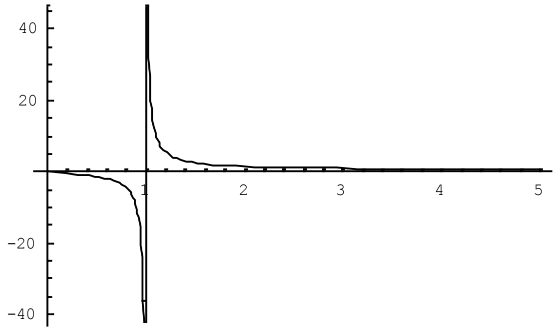
$f'(x)=\frac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}$, $f''(x)=\frac{-\ln x}{4x\sqrt{x}}$ $f_{\min}\left(\frac{1}{e^2}\right)=-\frac{2}{e}$, punkt przegięcia $(1,0)$,



2) $f(x)=\frac{1}{\ln x}$, $D_f=(0,1)\cup(1,+\infty)$

$\lim_{x\to 0+}f(x)=0$, $\lim_{x\to 1^-}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to 1+}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$

$f'(x)=\frac{-1}{x\ln^2 x}$, $f''(x)=\frac{2+\ln x}{x^2\ln^3 x}$, brak ekstremów; punkt przegięcia $(e^{-2},-\frac{1}{2})$,



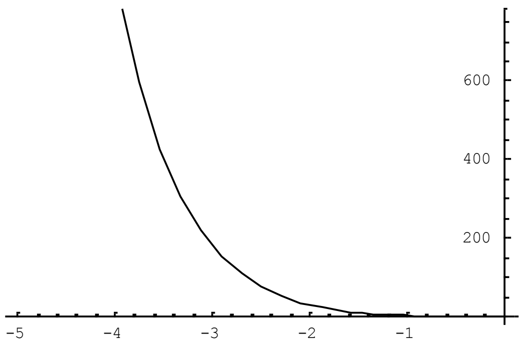
3) $f(x) = x^2 e^{-x}$; $D_f = (-\infty, +\infty)$

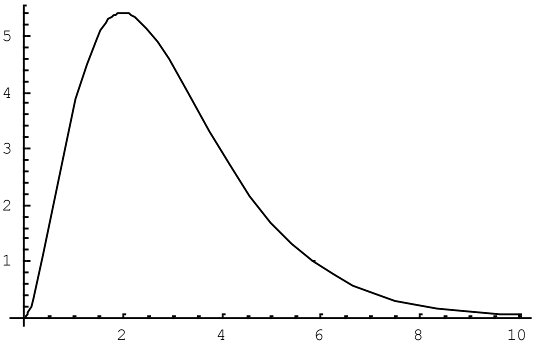
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$f'(x) = e^{-x}(2x - x^2)$, $f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$

$f_{\min}(0) = 0$, $f_{\max}(2) = 4e^{-2}$

Punkty przegięcia dla argumentów $x_1 = 2 - \sqrt{2}$, $x_2 = 2 + \sqrt{2}$





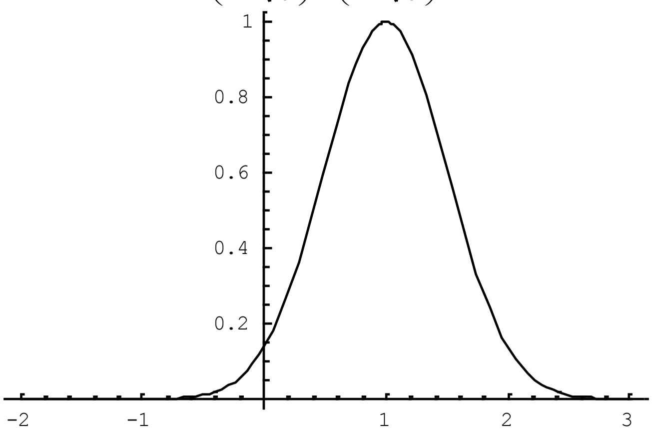
4) $f(x) = e^{-2(x-1)^2}$; $D_f = R$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$f'(x) = 4e^{-2(x-1)^2}(1 - x)$ $\qquad f_{\max}(1) = 1$

$f''(x) = 4e^{-2(x-1)^2}(4x^2 - 8x + 3)$

Punkty przegięcia $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$



PRACA DOMOWA 8 2015/16

Zad.1 Wykorzystać wzór Taylora z drugą pochodną i obliczyć przybliżone wartości

a) $\cos\frac{3}{2}$ b) $\sqrt[4]{e}$ c) $\sin\frac{1}{2}$.

Oszacować dokładność tych przybliżeń. Podać interpretację geometryczną.

Zad.2 Zbadać przebieg zmienności funkcji, naszkicować jej wykres.

1. $f(x)=\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$ 2. $f(x)=(\ln x)^2-2\ln x$ 3. $f(x)=arctg\frac{1}{x}$ 4. $f(x)=e^{\frac{x}{4-x}}$.

ODP:

zad.1

a) $\frac{3}{2}\approx\frac{\pi}{2}$

$\cos x=\cos\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2!}(-\cos c)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2$ gdzie c jest punktem leżącym w przedziale o końcach $x,\ \frac{\pi}{2}$.

$\cos\frac{3}{2}=\cos\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2!}(-\cos c)\left(\frac{3}{2}-\frac{\pi}{2}\right)^2$ gdzie c jest punktem leżącym w przedziale

$c\in\left(\frac{3}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

$\cos\frac{3}{2}\approx\cos\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=-\left(\frac{3}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi-3}{4}$

$|R|=\left|\frac{1}{2!}(-\cos c)\left(\frac{3}{2}-\frac{\pi}{2}\right)^2\right|\le\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{(\pi-3)^2}{4}\le\frac{0{,}142^2}{8}\le 0{,}0025205$

$\frac{\pi-3}{4}-0{,}0025205<\cos\frac{3}{2}<\frac{\pi-3}{4}$

b) $\sqrt[4]{e}=e^{\frac{1}{4}}$

$e^x=e^0+e^0(x-0)+\frac{1}{2!}e^c(x-0)^2$ gdzie c jest punktem leżącym w przedziale o końcach $x,\ 0$.

$\sqrt[4]{e}=e^0+e^0(\frac{1}{4}-0)+\frac{1}{2!}e^c\left(\frac{1}{4}-0\right)^2$ gdzie c jest punktem leżącym w przedziale $c\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$

$\sqrt[4]{e}\approx e^0+e^0(\frac{1}{4}-0)=\frac{5}{4}$

$R=\frac{1}{2!}e^c\left(\frac{1}{4}-0\right)^2=\frac{1}{2}\cdot e^c\cdot\frac{1}{16}=\frac{e^c}{32}\le\frac{\sqrt[4]{3}}{32}$

$\frac{5}{4}<\sqrt[4]{e}<\frac{5}{4}+\frac{\sqrt[4]{3}}{32}$

c) $\sin\frac{1}{2}$

$\sin x=\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\cdot\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2!}(-\sin c)\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2$ gdzie c jest punktem leżącym w przedziale o końcach $x,\ \frac{\pi}{6}$.

$\sin\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2!}(-\sin c)\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{6}\right)^2$ gdzie c jest punktem leżącym w przedziale $c\in\left(\frac{1}{2},\frac{\pi}{6}\right)$

$\sin\frac{1}{2}\approx\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$

$|R|=\left|\frac{1}{2!}(-\sin c)\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{6}\right)^2\right|=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{(3-\pi)^2}{36}<0{,}000281$

$$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{6}\right)-0{,}000281<\sin\frac{1}{2}<\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{6}\right).$$