Zadania ze Wstępu do Matematyki; Zestaw 11

Proszę wykazać za pomocą indukcji matematycznej:

1. n prostych na płaszczyźnie przecina się w co najwyżej $\frac{n(n-1)}{2}$ punktach.
2. $1 + 3 + 5 + \ldots (2n-1) = n^2$
3. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$
4. $1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + 3 \cdot (n-2) + \ldots + n \cdot 1 = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2)$
5. $n^3 + 2n$ jest podzielne przez 3.
6. $n^3 + 3n^2 - 4n$ jest podzielne przez 6.
7. $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$
8. $2\sqrt{n+1} - 2 < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$
9. Zauważyć, że następująca nierówność nie dowodzi się przez indukcję. Dlaczego?
   $2\sqrt{n} - 2 < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$
10. $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n-1} < \frac{2}{3} n \sqrt{n}$
11. Dany jest ciąg a_n, taki że $a_0 = 3$, $a_1 = 5$, oraz rekurencyjnie: $a_{n+1} = 4a_n - 3a_{n-1}$.
    Wykazać, że $a_n = 3^n + 2$.
12. Dany jest ciąg a_n, taki że $a_0 = 2$, $a_1 = 5$, oraz rekurencyjnie: $a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}$.
    Wykazać, że $a_n = 2^n + 3^n$.
13. Dane są ciągi:
    a_n, taki że $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, oraz rekurencyjnie: $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-2}$.
    b_n, taki że $b_0 = 1$, $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, oraz rekurencyjnie: $b_{n+1} = -a_n + 3a_{n-1} + 2a_{n-2}$.
    Wykazać, że $a_n = b_n$.
    Wskazówka: wykazać jednocześnie, że $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ *i* $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$.