

Zadania ze Wstępu do Matematyki; Zestaw 6

Zbadać parzystość i nieparzystość funkcji:

- | | |
|--|---|
| 1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2$ | 4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_3(\sqrt{x^2 + 1})$ |
| 2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^5 + 4x^3 - 6x$ | 5. $f : [-3, 4] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$ |
| 3. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^6 - 3x^4 + 5x^2 - 3$ | 6. $f : (-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ |

Dane są funkcje rosnące $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oraz malejąca $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Proszę rozwiązać równania i nierówności:

- | | |
|--|--|
| 7. $f(2x - 1) = f(1 - x)$ | 10. $a(2x - 3) > a(3x - 2)$ |
| 8. $f(a(x + 2)^3 + 3) = f(a(5 - x)^3 + 3)$ | 11. $g(a(f(x + 5) - 3 + x) + x^2) + 5 >$
$> g(a(f(7 - x) - 3 + x) + x^2) + 5$ |
| 9. $f(2x - 3) > f(3x - 2)$ | |

Dane są funkcje rosnące $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oraz malejące $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Proszę stwierdzić, które funkcje będą na pewno rosnące, które na pewno malejące, a które mogą nie być monotoniczne:

- | | | | |
|-------------------|-------------------|---------------|-------------------------|
| 12. $f(g(x))$ | 14. $f(x) - g(x)$ | 16. $a(b(x))$ | 18. $f(x) + a(x)$ |
| 13. $f(x) + g(x)$ | 15. $f(x)g(x)$ | 17. $f(a(x))$ | 19. $a(f(b(g(a(x))))))$ |

20. Proszę obliczyć średnią arytmetyczną, geometryczną i harmoniczną z liczb 4, 6 i 9.

21. Proszę obliczyć średnią ważoną z liczb 5, 4, 3 i 2 z wagami 1, 2, 3 i 4.

Przypomnijmy nierówności pomiędzy średnimi. Dla dowolnych liczb dodatnich x_i oraz $1 \leq p < q$ mamy:

$$\min\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \leq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \left(\frac{x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p}{n} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{x_1^q + x_2^q + \dots + x_n^q}{n} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Proszę wskazać i uzasadnić nierówności pomiędzy podanymi parami wyrażeń. Wszystkie litery oznaczają liczby dodatnie.

- | | |
|--|---|
| 22. $\sqrt[3]{abc}$ i $\frac{a + b + c}{3}$ | 25. $\sqrt[3]{ab^2}$ i $\frac{a + 2b}{3}$ |
| 23. $\frac{3abc}{ab + bc + ac}$ i $\sqrt[3]{abc}$ | 26. $\sqrt[4]{ab^3}$ i $\frac{a + 3b}{4}$ |
| 24. $\frac{1}{3}(a + b + c)^2$ i $a^2 + b^2 + c^2$ | 27. $\sqrt[6]{ab^2c^3}$ i $a + 2b + 3c$ |
| | 28. $3\sqrt[3]{(abc)^2}$ i $ab + bc + ac$ |

Zadanie dodatkowe dla bardzo dociekliwych:

29. $a^2bc + ab^2c + abc^2$ i $a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2$