

Zadania ze Wstępu do Matematyki; Zestaw W4

Proszę zaznaczyć na osi liczbowej następujące liczby i zbiory:

- | | | | |
|---------|------------------|----------------------------------|---------------------------------|
| 1. 5 | 3. $\frac{7}{4}$ | 5. $[1, 3)$ | 8. $[1, 3) \cup (4, 6]$ |
| | | 6. $(-4, 2)$ | 9. $(1, 5) \cap [3, 6]$ |
| 2. -3 | 4. $\sqrt{7}$ | 7. $[1, \infty) \setminus \{3\}$ | 10. $(1, 15) \setminus (5, 10)$ |

Proszę rozwiązać równania, wskazać zbiór rozwiązań oraz zaznaczyć na osi liczbowej. Z wyjątkiem dwóch ostatnich równań należy korzystać z interpretacji modułu jako odległości:

- | | | |
|-------------------|-------------------------|------------------------------|
| 11. $ x = 3$ | 13. $ x - 1 = x - 5 $ | 15. $ x - 2 = -1$ |
| 12. $ x - 2 = 1$ | 14. $ x - 3 = 0$ | 16. $ x - 1 + 2x - 7 = 5$ |

Proszę rozwiązać nierówności, wskazać zbiór rozwiązań oraz zaznaczyć na osi liczbowej. Należy korzystać z interpretacji modułu jako odległości:

- | | | | |
|----------------------|-----------------------|-----------------------------|--------------------------|
| 17. $ x < 1$ | 20. $ x + 5 > 3$ | 23. $5 < x - 5 \leq 7$ | 26. $ x+1 - 2x+7 > 1$ |
| 18. $ x - 2 < 3$ | 21. $ x - 1 > 2$ | 24. $ x - 1 < x - 3 $ | |
| 19. $ x - 3 \leq 2$ | 22. $0 < x - 3 < 4$ | 25. $ x - 2 > x - 5 + 1$ | |

Proszę zbadać parzystość i nieparzystość funkcji:

- | | |
|--|--|
| 27. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2$ | 30. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_3(\sqrt{x^2 + 1})$ |
| 28. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x^3 - 6x$ | 31. $f : [-3, 4] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$ |
| 29. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 5x^2 - 3$ | 32. $f : (-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ |
33. Proszę obliczyć średnią arytmetyczną, geometryczną i harmoniczną z liczb 4, 6 i 9.
34. Proszę obliczyć średnią ważoną z liczb 5, 4, 3 i 2 z wagami 1, 2, 3 i 4.

Przypomnijmy nierówności pomiędzy średnimi. Dla dowolnych liczb dodatnich x_i oraz $1 \leq p < q$ mamy:

$$\min\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \leq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \left(\frac{x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p}{n} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{x_1^q + x_2^q + \dots + x_n^q}{n} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Proszę wskazać i uzasadnić nierówności pomiędzy podanymi parami liczb. Wszystkie litery oznaczają liczby dodatnie.

- | | |
|---|--|
| 35. $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$ | 38. $\sqrt[3]{ab^2} \leq \frac{a+2b}{3}$ |
| 36. $\frac{3abc}{ab+bc+ac} \leq \sqrt[3]{abc}$ | 39. $\sqrt[4]{ab^3} \leq \frac{a+3b}{4}$ |
| 37. $\frac{1}{3}(a+b+c)^2 \leq a^2 + b^2 + c^2$ | 40. $6\sqrt[6]{ab^2c^3} \leq a + 2b + 3c$ |
| | 41. $3\sqrt[3]{(abc)^2} \leq ab + bc + ac$ |

Zadanie dodatkowe dla dociekliwych:

1. $a^2bc + ab^2c + abc^2 \leq a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2$