Zadania ze Wstępu do Matematyki; Zestaw 6

Zbadać parzystość i nieparzystość funkcji:

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2$
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^5 + 4x^3 - 6x$
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^6 - 3x^4 + 5x^2 - 3$
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \log_3(\sqrt{x^2+1})$
5. $f : [-3, 4] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$
6. $f : (-4, 4] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$

Dane są funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Funkcje f i g są rosnące a funkcja h jest malejąca. Proszę rozwiązać równania i nierówności:

7. $f(x^2 - 1) = f(1 - x)$
8. $f(h(x+2)^3 + 3) = f(h(5-x)^3 + 3)$
9. $f(2x - 3) > f(3x - 2)$
10. $h(2x - 3) > h(3x - 2)$
11. $g(h(f(x+5) - 3 + x) + x^2) + 5 >$
    $> g(h(f(7-x) - 3 + x) + x^2) + 5$
12. Proszę obliczyć średnią arytmetyczną, geometryczną i harmoniczną z liczb 4, 6 i 9.
13. Proszę obliczyć średnią ważoną z liczb 5, 4, 3 i 2 z wagami 1, 2, 3 i 4.

Przypomnijmy nierówności pomiędzy średnimi. Dla dowolnych liczb dodatnich x_i oraz $1 \leqslant p < q$ mamy:

$$\min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \leqslant \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leqslant \left(\frac{x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{x_1^q + x_2^q + \ldots + x_n^q}{n}\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

Proszę wskazać i uzasadnić nierówności pomiędzy podanymi parami wyrażeń. Wszystkie litery oznaczają liczby dodatnie.

14. $\sqrt[3]{abc}$ i $\dfrac{a+b+c}{3}$
15. $\dfrac{3abc}{ab+bc+ac}$ i $\sqrt[3]{abc}$
16. $\dfrac{1}{3}(a+b+c)^2$ i $a^2+b^2+c^2$
17. $\sqrt[3]{ab^2}$ i $\dfrac{a+2b}{3}$
18. $\sqrt[4]{ab^3}$ i $\dfrac{a+3b}{4}$
19. $6\sqrt[6]{ab^2c^3}$ i $a+2b+3c$
20. $3\sqrt[3]{(abc)^2}$ i $ab+bc+ac$

Zadanie dodatkowe dla bardzo dociekliwych:

21. $a^2bc + ab^2c + abc^2$ i $a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2$