PRACA DOMOWA 9 CAŁKA NIEOZNACZONA 2015/16

Zadanie 0 Obliczyć całki. Wyniki sprawdzić obliczając pochodne otrzymanych funkcji pierwotnych.

1) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$, 2) $\int \frac{2x^5 - 3x^2 - 1}{x^3} dx$, 3) $\int \frac{2^{3x}}{5^x} dx$, 4) $\int \frac{1}{4^x} dx$.

Zadanie 1 Obliczyć całki nieoznaczone całkując przez części.

1) $\int x4^x dx$, 2) $\int x^2 \cos x dx$, 3) $\int x^5 \ln x dx$, 4) $\int \frac{\ln x}{\sqrt[4]{x}} dx$ 5) $\int arctgx dx$.

Zadanie 2 Obliczyć całki nieoznaczone przez podstawienie

1) $\int e^{-2x} dx$, 2) $\int (2x+3)^9 dx$, 3) $\int \frac{1}{\sqrt[5]{3x+1}} dx$, 4) $\int \frac{dx}{4-5x}$,

5) $\int \sin \pi x dx$, 6) $\int \cos \frac{x}{2} dx$ 7) $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx$, 8) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$,

9) $\int \frac{(\ln x)^3}{x} dx$, 10) $\int \frac{dx}{x(\ln x - 4)}$, 11) $\int x e^{x^2} dx$, 12) $\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$

13) $\int x\sqrt{x^2+9} dx$, 14) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+4}} dx$, 15) $\int \frac{x}{4x^2+9} dx$, 16) $\int \frac{dx}{4x^2+5}$.

Zadanie 3

Obliczyć całki nieoznaczone całkując przez części lub (i) przez podstawienie

1) $\int x \cos 5x dx$, 2) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$, 3) $\int x^5 e^{x^2} dx$, 4) $\int \sin x \cos x e^{\sin x} dx$.

Wyniki zadań można sprawdzić obliczając pochodne otrzymanych funkcji pierwotnych.

Odpowiedzi:

Zad.1

1) $\frac{4^x}{\ln^2 4}(x \ln 4 - 1) + C$, 2) $(x^2 - 2)\sin x + 2x \cos x + C$,

3) $\frac{x^6}{36}(6\ln x - 1) + C$, 4) $\frac{4\sqrt[4]{x^3}}{9}(3\ln x - 4) + C$ 5) $x arctgx - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$.

zad.11) $-\frac{1}{2}e^{-2x} + C$, 2) $\frac{1}{20}(2x+3)^{10} + C$, 3) $\frac{5}{12}\sqrt[5]{(3x+1)^4} + C$, 4) $-\frac{1}{5}\ln|4-5x| + C$,

5) $-\frac{1}{\pi}\cos \pi x + C$, 6) $2\sin\frac{x}{2} + C$, 7) $\ln(e^x+1) + C$, 8) $\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3} + C$, 9) $\frac{1}{4}\ln^4 x + C$,

10) $\ln|\ln x - 4| + C$, 11) $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$, 12) $\cos\frac{1}{x} + C$, 13) $\frac{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}{3} + C$,

14) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+4} + C$, 15) $\frac{1}{8}\ln(4x^2+9) + C$, 16) $\frac{1}{2\sqrt{5}} arctg \frac{2x}{\sqrt{5}} + C$.

zad.3

1) $\frac{1}{5}x\sin 5x + \frac{1}{25}\cos 5x + C$, 2) $2\sqrt{x}(-2+\ln x) + C$,

3) $e^{x^2}\left(\frac{1}{2}x^4 - x^2 - 1\right) + C$, 4) $e^{\sin x}(\sin x - 1) + C$.

Zadanie 4 Obliczyć całki nieoznaczone

odpowiedzi

1. $\int x^2 \ln(x+1)dx$ — $\frac{x^3+1}{3}\ln(x+1)-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{6}+\frac{x}{3}+C$

2. $\int x^2 \arcsin x\, dx$ — $\frac{1}{9}\left(\sqrt{1-x^2}(2+x^2)+3x^3\arcsin x\right)+C$

3. $\int arctg\sqrt{x}\, dx$ — $(1+x)arctg\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$

4. $\int \frac{dx}{e^x(3+e^{-x})}$ — $C-\ln(3+e^{-x})$

5. $\int tgxdx$ — $-\ln|\cos x|+C$

6. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x}dx$ — $\frac{\cos^2 x}{2}-\ln|\cos x|+C$

7. $\int \frac{5-3x}{2x+5}dx$ — $-\frac{3}{2}x+\frac{25}{4}\ln|2x+5|+C$

CAŁKA OZNACZONA

Zad.1 Obliczyć i podać interpretację geometryczną całek.

a) $\int_1^3 (e^x-x)dx$, b) $\int_1^e \ln x dx$, c) $\int_1^4\left(x+5-\frac{4}{x}\right)dx$, d) $\int_2^5 \frac{2x+1}{x-1}dx$.

Zad.2 Korzystając z interpretacji geometrycznej podać wartości całek (nie obliczać)

a) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx$ b) $\int_0^1\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)dx$.

Zad.3 Obliczyć za pomocą całki oznaczonej pola figur ograniczonych liniami, wykonać rysunki

a) $y=\sqrt{8x}$, $y=\frac{2x+8}{3}$, b) $y=\frac{1}{1+x^2}$, $y=\frac{1}{2}x^2$,

c) $y=\ln x$, $y=-1$, styczna do wykresu funkcji $y=\ln x$ w punkcie $x=1$,

d) $xy=1$, $xy=8$, $y=x^2$, $y=\frac{1}{8}x^2$,

e) $y=\ln x$, $y=\ln^2 x$,

f) $y=x^2-x-6$, $y=-x^2+5x+14$.

Zad.4 Obliczyć średnią całkową funkcji na podanym przedziale. Wynik zilustrować graficznie.

a) $f(x)=|\cos x|$ na przedziale $\langle 0,\pi\rangle$,

b) $f(x)=\sin^2 x$ na przedziale $\langle 0,\pi\rangle$,

c) $f(x)=\ln x$ na przedziale $\langle 1,e\rangle$.

zad.5

Porównać wartości całek oznaczonych stosując znane własności (nie obliczać)

a) $I_1=\int_1^2\sqrt{x^2+4x+1}dx$, $I_2=\int_1^2\sqrt{x^2+1}dx$

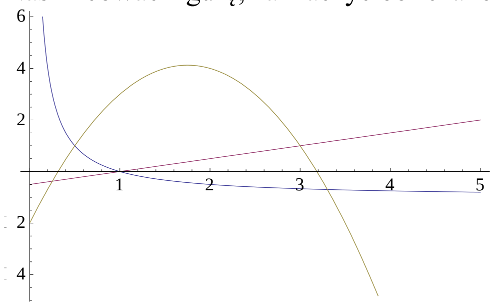
b) $I_1=\int_0^1\frac{1}{x^2-4}dx$, $I_2=\int_{-1}^1\frac{1}{x^2-4}dx$

zad.6 Oszacować wartość całki $I=\int_{-6}^{-1}\frac{1}{\sqrt{7-6x-x^2}}dx$.

Zad.7 Za pomocą rachunku całkowego obliczyć pole figury ograniczonej liniami : $f(x)=\cos x$ dla $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, styczną do wykresu funkcji *f* poprowadzoną w punkcie o odciętej $x=\frac{\pi}{3}$ oraz prostą $x=0$
Wykonać rysunek. Zaznaczyć obliczane pole.

Zad.8 Za pomocą rachunku całkowego obliczyć pole figury ograniczonej liniami : $f(x)=\frac{1}{3-x}$ dla $x<3$, styczną do wykresu funkcji *f* poprowadzoną w punkcie o odciętej $x=2$, $g(x)=\frac{1}{3}-\frac{5}{3}x$.
Wykonać rysunek. Zaznaczyć obliczane pole.

zad.9 Za pomocą rachunku całkowego obliczyć pole figury położonej w I ćwiartce układu współrzędnych ograniczonej wykresami funkcji $f(x)=\frac{1}{x}-1$, $g(x)=-2x^2+7x-2$, $h(x)=\frac{1}{2}(x-1)$.
Naszkicować figurę, zaznaczyć obliczane pole.



odpowiedzi

Zad.3 a) $\frac{4}{3}$, b) $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$, c) $\frac{1}{2}-\frac{1}{e}$,

d) $\ln 128 = 7\ln 2$, e) $3-e$, f) $\frac{343}{3}=114\frac{1}{3}$.

Zad.4 a) $\frac{2}{\pi}$, b) $\frac{1}{2}$, c) $\frac{1}{e-1}$.

Zad.5 a) $I_1 > I_2$, b) $I_1 > I_2$.

Zad.6 $\frac{5}{4} \le I \le \frac{5}{\sqrt{7}}$

zad.7 $\frac{\sqrt{3}\pi^2}{36}+\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

zad.8 $\ln 3-\frac{1}{3}$

zad.9 $\frac{173}{24}-\ln 2$

PRACA DOMOWA 10 METODA GAUSSA

Zad.0 Metodą eliminacji Gaussa rozwiązać układy równań o podanej macierzy rozszerzonej.

a) $\left[A|b\right]=\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right]$ b) $\left[A|b\right]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$

c) $\left[A|b\right]=\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$ d) $\left[A|b\right]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{array}\right].$

Zadanie 1 Rozwiązać układy równań metodą eliminacji Gaussa. Wykonać sprawdzenie.

a) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3+x_4=1 \\ -x_1+2x_3+3x_4=1 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1+3x_2+6x_3+4x_4=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x_1+3x_2 \quad + \quad x_4=-3 \\ 2x_2-x_3-3x_4=2 \\ -2x_1+2x_2+2x_3+5x_4=-6 \\ x_1+2x_2-x_3-x_4=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x_1-3x_2-x_3=2 \\ -x_1+4x_2+2x_3=0 \\ -4x_1-2x_2+3x_3=3 \\ 2x_1+5x_2+x_3=2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -x_1+x_2+2x_3-5x_4=-1 \\ 3x_1-x_2+2x_3-x_4=1 \\ 2x_1-2x_2+3x_3-4x_4=-5 \\ -2x_1+x_2-2x_3+2x_4=1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3+x_4-x_5=1 \\ 2x_1-x_2+7x_3-3x_4+5x_5=2 \\ x_1+3x_2-2x_3+5x_4-7x_5=3 \\ 3x_1-2x_2+7x_3-5x_4+8x_5=3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x_1+3x_2+x_3-3x_4+x_5=3 \\ -2x_1-6x_2-3x_3+5x_4+2x_5=3 \\ x_1+3x_2-4x_3-8x_4-x_5=4 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3+2x_4+2x_5=-1 \\ -2x_1+3x_2-x_3+x_4+3x_5=-1 \\ x_1-2x_2+x_3+x_4-x_5=0 \end{cases}$

Zadanie 2 Rozwiązać układy jednorodne metodą eliminacji Gaussa

a) $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3-x_4=0 \\ -x_1+3x_2+2x_3+2x_4=0 \\ 2x_1+5x_2-4x_3+3x_4=0 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ 2x-3y-z=0 \\ 4x-y+3z=0 \\ x-4y-3z=0 \end{cases}$, c) $\begin{cases} x_1+x_2+3x_3-x_4=0 \\ x_1-2x_2+4x_3+x_4=0 \\ -3x_1+x_2-2x_3+x_4=0 \\ 2x_1-2x_2+x_3-x_4=0 \end{cases}$.

zad.1 odp: a) układ nieoznaczony, 1 parametr .: $x_1=-1-7t$, $x_2=1+11t$, $x_3=-5t$, $x_4=t$, $t\in R$

b) układ oznaczony $x_1=\frac{5}{3}$, $x_2=0$, $x_3=2$, $x_4=-\frac{4}{3}$,

c) układ oznaczony $(2,-1,3)$.

d) nieoznaczony z 1 parametrem $(2-t,3,-1+2t,t)$ $t\in R$,

e) układ sprzeczny;

f) układ nieoznaczony z 2 parametrami $(2-3s+4t,s,-1-t,t,2)$ $t,s\in R$,

g) nieoznaczony z 2 parametrami $(1+3t+s,t-s,-1-2t-2s,t,s)$ $t,s\in R$.

Zad.2

odp: a), b) układy nieoznaczone; c) układ oznaczony

a) $\begin{cases} x_1 = 2t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = t \quad t \in R \\ x_4 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = -t \\ y = -t \\ z = t \quad t \in R \end{cases}$ c) $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$.

PRACA DOMOWA 11 2015

WYZNACZNIK

Zadanie 1

Oblicz wyznacznik macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ rozwijając go a) względem 2-go wiersza, b) 2-ej kolumny.

Zadanie 2 Obliczyć wyznaczniki korzystając z własności

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -6 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & 2 \\ -6 & 1 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & -4 & 6 & -7 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Zadanie 3 Obliczyć wyznaczniki podanych macierzy

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -3 & -4 & 6 \end{bmatrix}$, c) $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$,

d) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -6 & -1 \\ 2 & 1 & -5 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, e) $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.

odp:

zad.1 $\det A = 54$. **zad.4** –85, -24, 30, $2 \cdot 1 \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot 5 = 120$.

zad.3 a) 9, b) 30; c) 10; d) 4; e 12.

UKŁAD CRAMERA

Zadanie 1

Rozwiązać układy Cramera

1) wzorami Cramera 2) metodą eliminacji Gaussa.

a) $\begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ -x + 3y + z = 6 \\ 2x + y + 2z = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 3x + y + 4z = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 8 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -4 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -3 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = -6 \end{cases}$.

Zadanie 2 Rozwiązać układy równań w zależności od parametru a

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + ax_3 = 0 \\ ax_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 - ax_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + ay + z = 2 \\ -ax - y + 2z = 4 \\ x + y - z = -2a \end{cases}$

Zadanie 3 Dla jakiej wartości parametru a układ równań jest sprzeczny

$$\begin{cases} x_1 + (a-1)x_2 + (a+2)x_3 = a+4 \\ (a-2)x_1 + (a+2)x_2 + (2a+4)x_3 = 2a+3 \\ (a+1)x_1 + (4a-1)x_2 + (5a+10)x_3 = 5a+15 \end{cases}$$

Zadanie 4 Wyznaczyć te wartości parametru a, dla których układ równań jest nieoznaczony

$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + ax_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + ax_4 = 0 \end{cases}$. Dla wyznaczonych parametrów rozwiązać układ.

Odp.

Zad.1. a) $x = -9,\ y = -5,\ z = 12$, **b)** $x = y = z = 0$, **c)** $x_1 = 4,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0,\ x_4 = -3$.

zad.2

a) $a = 1$ układ nieoznaczony z 1 parametrem $(-t, t, 0)$ $t \in R$;

$a \neq 1$ układ oznaczony $(0,0,0)$

b) dla $a \in R - \{0,1\}$ układ oznaczony

$$x = \frac{2(2a+1)}{a},\ y = -\frac{2(a+1)}{a},\ z = \frac{2(a^2+a-1)}{a}$$

$\det A = a(1-a)$, $Wx = -2(a-1)(1+2a)$, $Wy = 2(a+2)(a-1)$,

$Wz = 2(-a^2 - a + 1)(a-1) = 2(-a^3 + 2a - 1)$

dla $a = 1$ układ nieoznaczony z 1 parametrem $\begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = t \\ x_3 = 2 \end{cases}$ $t \in R$

dla $a = 0$ układ sprzeczny

Zad.3 $a = 4$, wskazówka: rząd macierzy współczynników jest równy $rzA = \begin{cases} 2 & dla \quad a \neq 4 \\ 1 & dla \quad a = 4 \end{cases}$

Zad.4 $a = -1$, $\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = s \\ x_3 = t \\ x_4 = s \end{cases}$ $t, s \in R$ $\det A = (a^2 - 2a + 5)(a+1)^2 = a^4 + 2a^2 + 8a + 5$.

DZIAŁANIA NA MACIERZACH

Zadanie 1 Dane są macierze $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$.

Wyznaczyć (o ile jest to możliwe) macierze:

a) $-A + BC$, b) $AB + 2C^T$, c) $A(B-C)$, d) ABC, e) CAB.

Zadanie 2 Dane są macierze $A = \begin{bmatrix} 0 & 16 \\ 4 & -4 \\ 14 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Wyznaczyć macierz X z równania $2(X + B^T C) = A$.

Zadanie 3 Dane są macierze A_{mxn}, B_{kxn}, C_{mxs}. Podać jakie warunki powinny spełniać liczby naturalne m, n, k, s aby były określone macierze a) $AB^T + C$, b) $(A-C)B^T$,c) $C^T AB^T$.

Zadanie 4 Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ -7 & -4 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -8 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & -6 \end{bmatrix}$ sprawdzić, że zachodzi równość $(AB)^T = B^T A^T$.

Odp: **zad.1** a) $\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} -4 & -3 & -18 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$, c) niewykonalne; d) $\begin{bmatrix} 10 & -6 \\ 20 & -7 \end{bmatrix}$, e) $\begin{bmatrix} -30 & -8 & -25 \\ 0 & -2 & -10 \\ 40 & 11 & 35 \end{bmatrix}$

Zad.2 $X = \frac{1}{2}A - B^T C = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -3 & -1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$.

Zad.3 a) $k = s$, b) $n = s$, c) Macierz można wyznaczyć zawsze.

MACIERZ ODWROTNA, RÓWNANIA MACIERZOWE

Zadanie 1 Wyznaczyć macierze odwrotne i wykonać sprawdzenie.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$, b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -3 & -4 & 6 \end{bmatrix}$,

d) $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, e) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -6 & -1 \\ 2 & 1 & -5 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, f) $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.

Zadanie 2 Wyznaczyć macierz X z równania $AX = B$, jeśli $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

Zadanie 3. Rozwiązać równanie macierzowe $XA^T + 2XB = C$, gdy

$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -9 & 1 & 1 \\ -4 & -9 & 6 \\ 3 & -6 & 5 \end{bmatrix}$.

odp.

zad.1 b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{-4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-7}{9} & \frac{5}{9} & \frac{-2}{9} \end{bmatrix}$,**c)** $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{11}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{5} \\ \frac{-4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix}$, **d)** $A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 15 \\ -5 & -7 & 1 & -13 \\ 10 & 6 & 12 & 14 \\ 0 & -4 & 2 & -6 \end{bmatrix}$,

e) $A^{-1}=\begin{bmatrix} -7 & -3 & -19 & 9 \\ \frac{9}{4} & \frac{3}{4} & \frac{23}{4} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{11}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{29}{4} & \frac{7}{2} \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, **f)** $A^{-1}=\frac{1}{12}\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ -28 & -12 & -32 & -28 \\ -4 & 0 & -8 & -4 \\ 17 & 9 & 19 & 14 \end{bmatrix}$.

zad.2 $X = A^{-1}B$; $X=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -16 & 19 & -5 \\ -6 & 9 & -3 \end{bmatrix}$.

Zad.3 $XA^T + 2XB = C \Rightarrow X = C(A^T + 2B)^{-1}$ $X=\begin{bmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$,

$D = A^T + 2B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$, $D^{-1}=\begin{bmatrix} 3/10 & 0 & 1/10 \\ -3/5 & 1 & -1/5 \\ -7/10 & 1 & 1/10 \end{bmatrix}$.

PRACA DOMOWA 12 FUNKCJE WIELU ZMIENNYCH

Zad.1 Wyznaczyć dziedzinę funkcji

a) $z=\sqrt{y-x^2}$; b) $z=\ln(1-x^2-y^2)$; c) $z=e^{\frac{x}{y}}$;

Zad.2 Wyznaczyć warstwice funkcji *f*, a następnie najmniejszą i największą wartość tej funkcji na podanym zbiorze *A*

$f(x,y)=x+y \qquad A=\{(x,y): x^2+y^2\le 9\}$

Zad.3 Obliczyć pochodne cząstkowe rzędu pierwszego funkcji *f*

a) $f(x,y)=\sqrt{x}\, e^{-y}$;b) $f(x,y)=x\ln(x+y^2)$; c) $f(x,y)=x^{2y}$; d) $f(x,y,z)=(x/y)^z$

Zad.4 Korzystając z definicji rozstrzygnąć, czy w punkcie (0,0) funkcja ma ekstremum lokalne

a) $f(x,y)=\sin x+y$; b) $f(x,y)=x^3y$; c) $f(x,y)=x^4y^2$

zad.5 Wyznaczyć ekstrema funkcji określonej wzorem

a) $f(x,y)=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$;

b) $z=x^3+8y^3-6xy+1$;

c) $f(x,y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$;

d) $f(x,y)=x^2+y^2+xy-4\ln x-10\ln y$;

e) $f(x,y)=e^{x^2-y}(5-2x+y)$,

f) $f(x,y,z)=x^3+y^2+z^2+12xy+2z$;

g) $f(x,y,z)=x+\dfrac{y^2}{4x}+\dfrac{z^2}{y}+\dfrac{2}{z}$; w obszarze $x>0, y>0, z>0$;

h) $f(x,y,z)=x^3-3y^2+z^2+6y-6z$

i) $f(x,y,z)=\dfrac{x^3}{y}-3x+z+\dfrac{y^2}{z}$,

odp

zad.2

największa wartość funkcji na zbiorze *A* wynosi $3\sqrt{2}$, najmniejsza $-3\sqrt{2}$.
Warstwicami są linie proste $x+y=c$ gdzie *c* dowolna liczba rzeczywista.

Zad.3

a) $f'_x(x,y)=\dfrac{e^{-y}}{2\sqrt{x}}$; $f'_y(x,y)=-\sqrt{x}e^{-y}$;

b) $f'_x(x,y)=\dfrac{x}{x+y^2}+\ln(x+y^2)$ $f'_y(x,y)=\dfrac{2xy}{x+y^2}$;

c) $f'_x(x,y)=2yx^{2y-1}$ $f'_y(x,y)=2x^{2y}\ln x$;

d) $f'_x(x,y,z)=\dfrac{z}{y}\left(\dfrac{x}{y}\right)^{z-1}$ $f'_y(x,y,z)=-\dfrac{xz}{y^2}\left(\dfrac{x}{y}\right)^{z-1}$ $f'_z(x,y,z)=\left(\dfrac{x}{y}\right)^{z}\ln\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

Zad.4

a) nie; b) nie; c) w (0,0) minimum niewłaściwe.

Zad.5

a) $f_{\max}=f(4,4)=12$

b) $z_{\min}=z(1,1/2)=0$;

c) minimum w punktach $P_1(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ $P_2(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ równe -8;

d) minimum $f(1,2) = 7 - 10\ln 2$;

e) punkt stacjonarny $(1,-2)$, brak ekstremum

f) minimum $f(24,-144,-1) = -6913$;

g) minimum $f(\frac{1}{2},1,1) = 4$;

h) nie ma ekstremum.

i) punkty stacjonarne $A = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$, $B = \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right)$

minimum lokalne właściwe $f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2}$

maksimum lokalne właściwe $f\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$

FUNKCJE WIELU ZMIENNYCH EKSTREMA WARUNKOWE

Zad.1 Wyznaczyć ekstrema warunkowe

a) $f(x,y)=x^3+y^3$ przy warunku $x+y=2$

b) $f(x,y)=e^{xy}$ przy warunku $x+y=1$

c) $f(x,y)=\frac{1}{xy}$ przy warunku $x+y=2$

d) $f(x,y)=x-xy$ przy warunku $y=x^2$

e) $f(x,y)=3x^2+3y^2$ przy warunku $x^2+(y+2)^2=4$

Zad.2 Wyznaczyć największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x,y)=2x^2+2y^2+(x-1)^2+(y-1)^2$ w domkniętym trójkącie T o wierzchołkach (0,0), (1,0), (0,1).

Zad.3 Wyznaczyć największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x,y)=x^2+2xy-4x+8y$ w zbiorze $A=\{(x,y)\in R^2 : 0\le x\le 1, 0\le y\le 2\}$.

Zad.4 Wyznaczyć największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}(2x^2+3y^2)$ w zbiorze $A=\{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2\le 4\}$.

odp: **zad.1**

a) minimum warunkowe w punkcie $P(1,1)$

b) maksimum warunkowe w punkcie $P(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

c) maksimum warunkowe w punkcie $P(1,1)$

d)maksimum warunkowe w punkcie $P_1(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{3})$, $P_2(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{3})$

e) minimum warunkowe w punkcie $P_1(0,0)$, maksimum warunkowe w punkcie $P_2(0,-4)$ punkcie $P_2(\sqrt{2},\sqrt{2})$

Zad.2 w zadanym trójkącie wartość najmniejsza $f_{\min}=f(1/3,1/3)=4/3$; wartość największa $f(0,1)=f(1,0)=3$.

Zad.3 w zadanym zbiorze wartość najmniejsza $f(1,0)=-3$; największa $f(1,2)=17$.

Zad.4 w zadanym zbiorze wartość najmniejsza $f(0,0)=0$; największa $f(0,1)=f(0,-1)=\frac{3}{e}$.