1 Układy równań liniowych

1. Rozwiązać układy równań liniowych metodą eliminacji Gaussa

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ y - 2z = 3 \\ 4x - y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 3y + 7z = 2 \\ 9x + 4y - 5z = 11 \\ 6x + y - 8z = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - t = 1 \\ x + y - z = 0 \\ - y + z + t = -1 \\ -x + + z + t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ 2y + 5z = 1 \\ 6x - 4y - 3z = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 5y - 3z = 2 \\ -x + 2y - 4z = 3 \\ 3x + 6z = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - -x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$$

Rozwiązania układów równań $(1/5, -7/5, -11/5)$, $(4/5, 11/5, 1)$,
$(-1/3, 2/3, 1/3, -2/3)$
$((1-7t)/6, (1-5t)/6, t))$, , sprzeczny,
$(t, u, 3-t-u, 5)$.

2 Macierze

1. Obliczyć AB, BA , $A+B$ jeśli jest to możliwe i uzasadnić jeśli to nie jest możliwe:

(i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(ii) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

2. Znaleźć macierz odwrotną do macierzy i sprawdzić wynik

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

3. Rozwiązać równania macierzowe i sprawdzić wynik.

(i) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}$, (ii) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -7 \\ 7 \end{bmatrix}$,

(iii) $\begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & -3 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 \\ 21 \\ -12 \end{bmatrix}$, (iv) $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$,

(v) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

Odpowiedzi. 1.$AB = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 38 & 36 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 5 \\ 22 & 25 & 19 \\ 6 & 10 & 2 \end{bmatrix}$, 2. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1,5 & -0,5 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2,5 & -1,5 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} -8 & -5 & 6 \\ 18 & 11 & -13 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ 3. (i) $[2,-1]^T$, (ii) $[-2,3]^T$, (iv) $X = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ (v) $X = \begin{bmatrix} -10 & -5 \\ 34 & 18 \end{bmatrix}$

3 Płaszczyzna i prosta w przestrzeni $\mathbb{R}^3$

1. Podać równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $(1, 0, 2)$ prostopadłej do wektora $(2, 3, 1)$
2. Podać równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty $(1, -1, -1)$, $(4, -1, 1)$, $(1, 1, 0)$
3. Podać równanie prostej przechodzącej przez punkty $(2, 1, 3)$, $(2, 3, -1)$.
4. Znaleźć płaszczyznę symetralną odcinka o końcach $(3, 1, 2), (-1, 3, 6)$
5. Znaleźć punkt symetryczny do $(1, 2, 7)$ względem płaszczyzny $x + y - z = 2$
6. Znaleźć punkt symetryczny do $(3, 1, 2)$ względem prostej $(3 + t, 1 - t, 2t)$.
7. Znaleźć kąt między wektorami v i w. Czy jest to kąt ostry?
   (a) $v = (3, 4, 7),\ w = (2, -5, 2)$
   (b) $v = (1, 2, 3),\ w = (6, 4, -2)$
8. Dla jakiej wartości parametru λ wektory $(\lambda, 3, 4), (4, \lambda, -7)$ są prospopadłe
9. Znaleźć wektor długości 1 prostopadły do wektorów $((1, 1, 2)$, $(2, 1, 1)$. Ile jest takich wektorów?
10. Obliczyć pole trójkąta o wierzchołkach $(1, 1, 1)$, $(7, 4, -1)$, $(4, -1, 7)$
11. Czy wektory $(1, 1, 2)$, $(2, 0, 3)$, $(4, -1, 2)$, $(2, -3, 5)$ leżą na jednej płaszczyźnie ?
12. Obliczyć objętość piramidy o wierzchołkach $A(0, 0, 1)$, $B(2, 3, 5)$, $C(6, 2, 3)$, $D(3, 7, 2)$
13. W zadaniu poprzednim znaleźć długość wysokości spuszczonej na ścianę BCD.
14. Obliczyć pole trójkąta BCD z poprzedniego równania a następnie znaleźć raz jeszcze objętość piramidy i porównać wyniki.

Odpowiedzi. **(1)** $2x + 3y + z = 4$, **(2)** $4x + 3y - 6z = 7$, **(3)** np.$(2, 1 + t, 3 - 2t)$ możliwe są inne zapisy tej samej prostej ! muszą się zgadzać wektory kierunkowe i musi być punkt wspólny, **(4)** $-2x + y + 2z = 8$ **(5)**$(5, 6, 3)$, **(6)** $(7, -3, 6)$ **(7)** (a) prosty, (b) ostry, **(8)** 4, **(9)**$w = \frac{1}{\sqrt{11}}(-1, 3, 1)$ oraz wektor przeciwny $-w$, **(10)** $\frac{49}{2}$ (obliczyć iloczyn wektorowy odpowiednich wektorów). **(11)**Zbadać iloczyn mieszany odpowiednich wektorów **(12)** 20, **(13)** 4, **14** Wyniki muszą się zgadzać !

4 Układy równań Cramera

Rozwiązać następujące układy równań, stosując wzory Cramera i sprawdzić poprawność rozwiązań.

1. $x + 5y = 2$, $-3x + 6y = 15$
2. $x - 2y + 3z = -7$, $3x + y + 4z = 5$, $2x + 5y + z = 18$
3. $x + 2y - 3z = 0$, $4x + 8y - 7z + t = 1$, $x + 2y - z + t = 1$, $-x + y + 4z + 6t = 0$

5 Przestrzeń, liniowa zależność,baza przestrzeni liniowej

1. Które z podanych podzbiorów przestrzeni $\mathbb{R}^n$ są podprzestrzeniami:
   (a) $\{(x,y,z); x,y,z \in \mathbb{Z}\}$, (b) $\{(x,y,z); x \geqslant 0\}$, (c) $\{(x,y,z); x-2y+3z=0\}$

2. Przestawić wektor w jako kombinację liniową wektorów v_i:

   (a) $w=(2,5)$, $v_1=(1,-2)$, $v_2=(2,-3)$
   (b) $w=(1,-1,5)$, $v_1=(1,1,2)$, $v_1=(2,1,-1)$, $v_3=(1,0,1)$
   (c) $w=(2,1)$, $v_1=(-2,4)$; $v_2=(3,-6)$
   (d) $w=(1,-2)$, $v_1=(-2,4)$; $v_2=(3,-6)$

3. Czy wektor v jest kombinacją wektorów v_i:
   (a) $v=[1,2]$, $v_1=[1,0]$, $v_2=[2,0]$ (b) $v=[3,-1]$, $v_1=[-1,1]$, $v_2=[1,-1]$

4. Czy podane układy wektorów są liniowo niezależne:
   (a) $[1,2],[2,1]$, (b) $[1,2,3],[4,4,5],[2,3,1]$, (c) $[1,-1],[2,1],[0,3]$.

5. Wykazać, że jeśli układ wektorów v_1,v_2,v_3 jest liniowo niezależny to również niezależne są układy:
   (a) v_1+v_2, v_2+v_3 , v_3+v_1 , (b) $v_1+v_2+v_3$, v_1+v_2 , v_2+v_3.

6. Czy podane układy wektorów są bazą przestrzeni $\mathbb{R}^2$; (a) $(1,1),(1,-1)$, (b) $(1,-2),(-2,4)$.

7. Czy wektory $(1,1,0),(1,0,1),(0,1,-1)$ tworzą bazę $\mathbb{R}^3$?

8. Wiadomo , że dokładnie jeden z podanych układów jest bazą $\mathbb{R}^3$. Czy można go wskazać bez rachunków? (a) $(1,0,-1),(2,1,3),(0,-2,3)$, (b) $(3,-2,8),(2,1,4)$, (c) $(1,2,1),(1,2,1),(1,0,-1)$

9. Sprawdzić, że wektory $(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)$ są bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$.Znaleźć rozkład wektora v w tej bazie: (a) $v=[2,3,4]$, (b) $[-1,2,4]$, (c) $[2,-1,0]$.

10. Pokazać, że $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; 2x=y-3z\}$ jest podprzestrzenią i znaleźć bazę tej podprzestrzeni.

6 Rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych

1. Znaleźć naturalną dziedzinę funkcji $f(x,y)$: a) $x + \dfrac{x}{y}$, b) $x\sqrt{x-y}$, c) $x\ln(y-x)$
   d)$x\sqrt{4-x^2+y^2}$, e) $x\dfrac{x-y}{x+y}$, f) $x\arcsin(\dfrac{y}{x})$, g) $x\arccos(\dfrac{x}{x+y})$

2. Opisać wykresy funkcji dwu zmiennych $z = f(x,y)$: a)$f(x,y) = const$, b)$f(x,y) = x$, c) $f(x,y) = y^2$,
   d) $f(x,y) = 2x + y - 2$, e) $x^2 + y^2$,
   f) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$

3. Obliczyć pochodne cząstkowe rzędu pierwszego funkcji dwu zmiennych $f(x,y)$:
   a)$x^3 + 2x^2y + 3xy^2 + 4x - 5y + 100$, b) $x \cdot \sin(x+2y)$, c) $y^2\cos(2x-y)$. d) $\sin^2(xy^3)$,
   e) 3^{xy}, f) $\arcsin(\frac{x}{y})$

4. Obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia : a) $\sqrt{(2,87)^2 + (4,07)^2}$, b) $\sqrt{(0,96)^3 + (2,07)^3}$,

5. Znaleźć extrema lokalne funkcji: a) $5 + 2x + 6y - x^2 - y^2$, b) $x^3 + y^3 + 3xy$, c) $x^3 + 3xy^2 + 12xy$

6. Zbudować akwarium o zadanej objętości S i najmniejszej powierzchni.

7. Znaleźć punkt na płaszczyźnie dla którego suma kwadratów odległości od prostych $x = 0, y = 0, x - y = 1$ jest najmniejsza.

8. Dane są trzy punkty $P_i(x_i, y_i)$ o masach $m_i(i = 1,2,3)$. Dla jakiego punktu $P(x,y)$ moment bezwładnośći układu P_1, P_2, P_3 względem punktu P jest minimalny ? Jaka jest interpretacja fizyczna tego wyniku ?

9. Napisać równanie płaszczyzny stycznej i prostej normalnej do powierzchni a) $z = x^2 + y^2 + 1$ w punkcie $(1,1,3)$, b) $z = x^2 + y^2 - z^2 = -1$ w punkcie $(2,2,3)$, c)$z = \ln(x^2 + y^2)$ w punkcie $(1,0,0)$

10. Znależć punkty w których płaszczyzna styczna do elipsoidy $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ jest równoległa do płaszczyzny $x + 4y + 6z = 0$.

11. W których punktach elipsoidy $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} + z^2 = 1$ normalna do powierzchni tworzy z osiami współrzędnych jednakowe kąty ?

    Odp. 1) a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \neq 0\}$, b) $x \geqslant y$, c) $x < y$, d) koło o środku $(0,0)$ i promieniu 2, e) $x \neq -y$, . f) $|x| \geqslant |y|$ obszar zawarty między prostymi $x+y$ oraz $x = -y$ (narysować!), g) obszar zawarty między prostymi $y + 0$ oraz $y = -x$ **2)** a,b,d płaszczyzny (opisać je dokładniej!), c) walec paraboliczny, e) paraboloida obrotowa, f) figura obrotowa: wykres gęstości (2 wymiarowego) rozkładu normalnego. **3)** a) $f_x = 3x^2 + 4xy + 3x^2 + 3y^2 + 4$, $f_y = 2x^2 + 6xy - 5$, b) $f_x = \sin(x+2y) + x\cos(x+2y)$, $f_y = 2x\cos(x+2y)$, c) $f_x = -2y^2\sin(2x-y)$, $f_y = 2y\cos(2x-y) + y^2\sin(2x-y)$ d) $f_x = 2\sin(xy^3)\cos(xy^3)y^3$, $f_y = 2\sin(xy^3)\cos(xy^3)3xy^2$ e) $f_x = \ln 3 \cdot 3^{xy}y$, $f_y = \ln 3 \cdot 3^{xy}x$ f) $f_x = \frac{\mathrm{sgny}}{\sqrt{y^2-x^2}}$, $f_y = \frac{|x|}{\sqrt{y^2-x^2}|y|}$ **4)** a)$4,98$ b) $3,12$ **5)** a) $f(1,3) = 15$ max, b) $f(-1,-1) = 1$ max, c) $f(2,-2) = -16$ min. **6)** wymiary: $x = \sqrt[3]{2S}$, $y = \sqrt[3]{2S}$, $z = \sqrt[3]{\frac{S}{4}}$ **7)** $(\frac{1}{4}, \frac{-1}{4})$ **8)** $x = \dfrac{x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$, $y = \dfrac{y_1m_1 + y_2m_2 + y_3m_3}{(m_1 + m_2 + m_3}$ środek ciężkości. **9)** a) $2x + 2y - z = 1$, b) $2x + 2y - 3z = -1$, c) $2x + z = 2$ **10)** $(1,2,2), (-1,-2,-2)$ **11)** $(\dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{1}{3}), (\dfrac{-4}{3}, \dfrac{-4}{3}, \dfrac{-1}{3})$

7 Całka podwójna

1. Obliczyć całkę $\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{dxdy}$ po obszarze $D=[0,1]\times[0,2]$ [*Odp.* $\frac{10}{3}$].

2. Obliczyć objętość bryły ograniczonej od góry parabolą $z=x^2+y^2$ a od dołu kwadratem $[-1,+1]\times[-1,+1]\subset\mathbb{R}^2$. [$\frac{8}{3}$]

3. Obliczyć całkę po obszarze $D\subset\mathbb{R}^2$ ograniczonym liniami:
   $\iint_D xy\mathrm{dxdy} \quad x=0, y=0, x+y=1.$ [$\frac{1}{24}$]
   $\iint_D (x+y)\mathrm{dxdy} \quad x=0, y=0, x+y=2$ [$\frac{8}{3}$]
   $\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{dxdy} \quad y=0, x=y, x=1$ [$\frac{1}{3}$]
   $\iint_D (2x+y)\mathrm{dxdy} \quad x=0, y=0, x+y=3$ [$\frac{27}{2}$]
   $\iint_D \cos(x+y)\mathrm{dxdy} \quad x=0, x=y, y=\pi$ [-2]
   $\iint_D (x^2+y+1)\mathrm{dxdy} \quad x=0, y=0, x+2y=1$ [$\frac{1}{3}$]

4. Obliczyć objętość bryły ograniczonej przez powierzchnie $y=1,\ z=0,\ y=x^2,\ z=x^2+y^2$ [$\frac{88}{105}$]

5. Stosując współrzędne biegunowe obliczyć całki :
   $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{dxdy}$ gdzie $D=K(0,R)$(koło o środku $(0,0)$ i promieniu R. [$\frac{2\pi R^3}{3}$]
   $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{dxdy}$ gdzie $D=K(0,1)$ [$\frac{2\pi}{3}$]
   $\iint_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{dxdy}$ gdzie D - jest pierścieniem 0 środku w punkcie $(0,0)$ i promieniach π i 2π [$-6\pi^2$]
   $\iint_D x^2+y^2\mathrm{dxdy}$ gdzie D jest wnętrzem okręgu $x^2+y^2=2x$.
   Wskazówka. Ustalić zmienność promienia r w zależności od kąta ϕ. [$\frac{2\pi}{2}$]

6. Obliczyć objętość bryły ograniczonej przez paraboloidę $z=3-x^2-y^2$ i płaszczyznę $z=0$ [$\frac{9\pi}{2}$]
   W poniższych zadaniach stosujemy wzory (dla płaskiego obszaru o gęstości $\rho(x,y)$):
   współrzędne *środka ciężkości* $x_s=\dfrac{\iint_D x\rho(x,y)\mathrm{dxdy}}{\iint_D \rho(x,y)\mathrm{dxdy}}$, $y_s=\dfrac{\iint_D y\rho(x,y)\mathrm{dxdy}}{\iint_D \rho(x,y)\mathrm{dxdy}}$,
   moment statyczny : $M_x=\displaystyle\iint_D x\rho(x,y)\mathrm{dxdy}$ - względem osi OX)
   $M_y=\displaystyle\iint_D y\rho(x,y)\mathrm{dxdy}$ - względem osi OY,
   moment bezwładności: względem prostej l $I_l=\displaystyle\iint_D r^2(x,y)\rho(x,y)\mathrm{dxdy}$ gdzie $r(x,y)$ oznacza odległość punktu (x,y) od prostej l
   moment bezwładności względem punktu (x_0,y_0) ten sam wzór przy czym $r(x,y)$ oznacza odległość punktu (x,y) od (x_0,y_0)

7. Obliczyć środek ciężkości płaskiego jednorodnego obszaru ograniczonego parabolą $y=\frac{x^2}{2}$ i prostą $y=2$. [$(0,\frac{6}{5}$]

8. Obliczyć środek ciężkości jednorodnego wycinka koło o promieniu R i kącie rozwartości $a\alpha$. Do czego dąży ten środek gdy $\alpha\to 0$? *Wskazówka* Przyjąć jako środek punkt $(0,0)$ a półprostą dodatnią OX jako oś symetrii ($\frac{2\sin\alpha}{3\alpha}R,0$)

9. Obliczyć moment statyczny połowy jednorodnego koła o promieniu R względem średnicy [$\frac{2}{3}R^2$]

10. Obliczyć moment bezwładności jednorodnego koła o promieniu R względem (a) środka, (b) średnicy [(a) $\frac{\pi R^4}{2}$, (b) $\frac{\pi R^4}{4}$]

8 Liczby zespolone

1. Obliczyć wartości: $(2+i)(1-3i)$, $\dfrac{1}{2+i}$, $\dfrac{3+1}{1-i}$, $\dfrac{1+2i}{1-i}$

2. Podać interpretację geometryczną następujących zbiorów:

   (a) $\{z \in \mathbb{C}; |z| \leqslant 3\}$

   (b) $\{z \in \mathbb{C}; |z-1| > 2\}$

   (c) $\{z \in \mathbb{C}; 2 < |z| \leqslant 3\}$

   (d) $\{z \in \mathbb{C}; \frac{\pi}{2} \leqslant arg(z) < \pi\}$

   (e) $\{z \in \mathbb{C}; \mathrm{re}z = \mathrm{im}z\}$

3. Przedstawić w postaci trygonometrycznej: $1+i$, $2-2i$, $-\frac{i}{2}$, $1-\sqrt{3}i$, $1+i\mathrm{tg}\alpha$.

4. Podać i narysować pierwiastki z jedności stopni: $n = 6, 8, 12$

5. Uzasadnić, że przy mnożeniu liczb zespolonych moduły się mnożą a argumenty dodają.

6. Obliczyć pierwiastki stopnia n z liczby z. Zaznaczyć je na płaszczyźnie Gaussa. Uwaga; zawsze musi ich być n:

   (a) $n = 2 : z = 1$, $z = -1$, $z = -4$, $z = 1+i$, $z = i-1$

   (b) $n = 4 : = -1$, $z = i$.

7. Rozwiązać równanie : $z^2 - 2z + 2 = 0$; $z^2 - 4z + 13 = 0$; $z^4 - 2z^2 + 2 = 0$

8. Obliczyć: $(1-i)^{20}$, $(\sqrt[3]{3}+i)^{12}$, $(3-\sqrt{3}i)^6$

9 Równania różniczkowe

1. Znaleźć rozwiązania równań różniczkowych o zmiennych rozdzielonych spełniające zadane warunki początkowe. Określić dzidziny tych rozwiązań.

   (a) $\dot{x} + x = 0$; $x(1) = 1$. $[x = e^{1-t}]$

   (b) $\dot{x} = e^{x+t}$; $x(0) = 0$. $[x = -\ln(2 - e^t)]$

   (c) $\dot{x} = xt$; $x(1) = 1$. $[x = e^{t^2/2}]$

   (d) $\dot{x} \cdot x + t = 0$; $x(-2) = 4$. $[x = \sqrt{20 - t^2}]$

   (e) $\dot{x} = \frac{2x}{t}$; $x(-2) = 1$. $[x = t^2/4]$

   (f) $\dot{x} = \frac{3t}{x}$; $x(1) = -2$. $[x = -\sqrt{3t^2 + 1}]$

   (g) $t(x + 1) \cdot x = x$; $x(e) = 1$. $[\ln x + x = \ln t]$

2. Polon-210 ma okres połowicznego rozkładu 140 dni. Znaleźć masę tego pierwiastka po 100 dniach, jeżeli jego masa początkowa wynosiła 200 gram. $[\approx 121,9g]$

3. Było 1000 bakterii. Po 5 godzinach ich ilość wzrosła do 3000. Ile ich będzie po 24 godzinach? $[\approx 195000]$

4. Jaki czas musi upłynąć aby promieniotwórczy stront zredukował swoją masę do 10%. Okres połowicznego rozkładu wynosi 28 lat. $[\approx 93 lata]$.

5. Kultura licząca 500 bakterii rozwija się według wykładniczego prawa wzrostu tak, że po trzech godzinach osiąga stan 8000 bakterii. Kiedy populacja osiągnie milion bakterii? $[\approx 8,5h]$

6. W pomieszczeniu o tempereturze 20^oC, ciało rozgrzane do temperatury 100^oC ochłodziło się do 60^o C w przeciągu 20 minut. Kiedy temperatura spadnie do 30^o C ?

   Wskazówka: Prawo Newtona. Prędkość stygnięcia jest proporcjonalna do różnicy temperatur. [60 min]

7. Temperatura chleba wyjętego z pieca spada w ciągu 20 minut od 100^oC do 50^oC gdy temperatura otoczenia wynosi 20^oC. Kiedy chleb będzie miał 30^oC?

8. Kawa w filiżance po trzech minutach po zalaniu wrzątkiem ma temperaturę 90^oC. Kiedy temperatura spadnie do 37^oC jeśli temperatura otoczenia wynosi 22^oC? $[\approx 36 minut]$.