

## Zadania ze Wstępu do Matematyki;      Zestaw W4

Proszę zaznaczyć na osi liczbowej następujące liczby i zbiory:

- |         |                  |                                  |                                 |
|---------|------------------|----------------------------------|---------------------------------|
| 1. 5    | 3. $\frac{7}{4}$ | 5. $[1, 3)$                      | 8. $[1, 3) \cup (4, 6]$         |
|         |                  | 6. $(-4, 2)$                     | 9. $(1, 5) \cap [3, 6]$         |
| 2. $-3$ | 4. $\sqrt{7}$    | 7. $[1, \infty) \setminus \{3\}$ | 10. $(1, 15) \setminus (5, 10)$ |

Proszę rozwiązać równania, wskazać zbiór rozwiązań oraz zaznaczyć na osi liczbowej. Z wyjątkiem dwóch ostatnich równań należy korzystać z interpretacji modułu jako odległości:

- |                   |                         |                              |
|-------------------|-------------------------|------------------------------|
| 11. $ x  = 3$     | 13. $ x - 1  =  x - 5 $ | 15. $ x - 2  = -1$           |
| 12. $ x - 2  = 1$ | 14. $ x - 3  = 0$       | 16. $ x - 1  +  2x - 7  = 5$ |

Proszę rozwiązać nierówności, wskazać zbiór rozwiązań oraz zaznaczyć na osi liczbowej. Należy korzystać z interpretacji modułu jako odległości:

- |                      |                       |                             |                          |
|----------------------|-----------------------|-----------------------------|--------------------------|
| 17. $ x  < 1$        | 20. $ x + 5  > 3$     | 23. $5 <  x - 5  \leq 7$    | 26. $ x+1  -  2x+7  > 1$ |
| 18. $ x - 2  < 3$    | 21. $ x - 1  > 2$     | 24. $ x - 1  <  x - 3 $     |                          |
| 19. $ x - 3  \leq 2$ | 22. $0 <  x - 3  < 4$ | 25. $ x - 2  >  x - 5  + 1$ |                          |

27. Proszę obliczyć średnią arytmetyczną, geometryczną i harmoniczną z liczb 4, 6 i 9.

28. Proszę obliczyć średnią ważoną z liczb 5, 4, 3 i 2 z wagami 1, 2, 3 i 4.

Zbadać parzystość i nieparzystość funkcji:

- |   |  |
|---|--|
| 29. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2$      | 32. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_3(\sqrt{x^2 - 1})$ |
| 30. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^5 + 4x^3 - 6x$       | 33. $f : [-3, 4] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$                       |
| 31. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^6 - 3x^4 + 5x^2 - 3$ | 34. $f : (-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$                       |

Przypomnijmy nierówności pomiędzy średnimi. Dla dowolnych liczb dodatnich  $x_i$  oraz  $1 \leq p < q$  mamy:

$$\min\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \leq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \left( \frac{x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p}{n} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \frac{x_1^q + x_2^q + \dots + x_n^q}{n} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Proszę wskazać i uzasadnić nierówności pomiędzy podanymi parami liczb. Wszystkie litery oznaczają liczby dodatnie.

- |   |  |
|---|--|
| 35. $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$        | 38. $\sqrt[3]{ab^2} \leq \frac{a+2b}{3}$   |
| 36. $\frac{3abc}{ab+bc+ac} \leq \sqrt[3]{abc}$  | 39. $\sqrt[4]{ab^3} \leq \frac{a+3b}{4}$   |
| 37. $\frac{1}{3}(a+b+c)^2 \leq a^2 + b^2 + c^2$ | 40. $6\sqrt[6]{ab^2c^3} \leq a + 2b + 3c$  |
|   | 41. $3\sqrt[3]{(abc)^2} \leq ab + bc + ac$ |

Zadanie dodatkowe dla dociekliwych:

1.  $a^2bc + ab^2c + abc^2 \leq a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2$