

Zadania ze Wstępu do Matematyki; Zestaw 9i10

Sprawdzić metodą zero-jedynkową czy następujące formuły logiczne są tautologiami:

- | | |
|---|--|
| 1. $x \vee \neg x$ | 10. $(\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y) \vee (x \wedge y)$ |
| 2. $x \wedge \neg x$ | 11. $(x \iff y) \iff (\neg x \iff \neg y)$ |
| 3. $(x \Rightarrow y) \iff (y \Rightarrow x)$ | 12. $(x \iff \neg y) \iff (\neg x \iff y)$ |
| 4. $(x \Rightarrow y) \iff (\neg y \Rightarrow \neg x)$ | 13. $\neg x \iff (y \Rightarrow x)$ |
| 5. $(x \Rightarrow y) \iff (\neg y \Rightarrow x)$ | 14. $x \Rightarrow (x \vee y)$ |
| 6. $(x \Rightarrow y) \iff (y \Rightarrow \neg x)$ | 15. $x \Rightarrow (x \wedge y)$ |
| 7. $(x \Rightarrow y) \iff (\neg x \vee y)$ | 16. $(x \vee y) \Rightarrow x$ |
| 8. $(x \Rightarrow y) \iff \neg(x \wedge \neg y)$ | 17. $(x \wedge y) \Rightarrow x$ |
| 9. $\neg x \vee \neg y \vee (x \wedge y)$ | 18. $((x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow z)) \Rightarrow (x \Rightarrow z)$ |

Podać przykłady formuł zdaniowych φ , takich by spełnione były równości:

Oznaczamy: $B = \{0, 1\} = \{\text{Fałsz}, \text{Prawda}\}$.

19. $\{x \in B \mid \varphi(x)\} = \{0\}$
20. $\{x \in B \mid \varphi(x)\} = \{1\}$
21. $\{x \in B \mid \varphi(x)\} = \{0, 1\} = B$
22. $\{x \in B \mid \varphi(x)\} = \emptyset$
23. $\{(x, y) \in B^2 \mid \varphi(x, y)\} = \{(0, 0), (1, 1)\}$
24. $\{(x, y) \in B^2 \mid \varphi(x, y)\} = \{(1, 0)\}$
25. $\{(x, y) \in B^2 \mid \varphi(x, y)\} = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$
26. $\{(x, y, z) \in B^3 \mid \varphi(x, y, z)\} = \{(0, 0, 0), (1, 1, 1)\}$
27. $\{(x, y, z) \in B^3 \mid \varphi(x, y, z)\} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

Proszę „schować” negacje pod odpowiedziami nierównościami. Nie interesuje nas prawdziwość ani fałszywość wyrażeń:

- | | | |
|--|--|---|
| 28. $\neg \forall x x > 3$ | 31. $\neg \exists x \forall y x \geq 5 \wedge x < y$ | 34. $\neg \exists x \exists y \forall z x = y \wedge y < z$ |
| 29. $\neg \exists x x \geq 3$ | 32. $\neg \forall x \exists y \forall z x > z \vee y \geq z$ | 35. $\neg \forall x \forall y \exists z x = z \vee z > y$ |
| 30. $\neg \forall x \exists y x > 3 \vee y \leq x$ | 33. $\neg \exists x \forall y \exists z x \geq z \wedge z < y$ | 36. $\neg \forall x \forall y \forall z x = z \wedge z = y$ |

W miejsce \square wstawić \Rightarrow lub \Leftarrow lub \iff tak by otrzymane wyrażenie było prawdziwe dla każdej formuły φ .

- | | |
|---|---|
| 37. $\forall x \forall y \varphi(x, y) \square \forall y \forall x \varphi(x, y)$ | 41. $\exists x \varphi(x) \wedge \psi(x) \square \exists x \varphi(x) \wedge \exists y \psi(y)$ |
| 38. $\exists x \exists y \varphi(x, y) \square \exists y \exists x \varphi(x, y)$ | 42. $\forall x \varphi(x) \wedge \psi(x) \square \forall x \varphi(x) \wedge \forall y \psi(y)$ |
| 39. $\exists x \forall y \varphi(x, y) \square \forall y \exists x \varphi(x, y)$ | 43. $\forall x \varphi(x) \vee \psi(x) \square \forall x \varphi(x) \vee \forall y \psi(y)$ |
| 40. $\exists x \varphi(x) \vee \psi(x) \square \exists x \varphi(x) \vee \exists y \psi(y)$ | |

W następujących wyrażeniach różne zmienne związane zastąpić różnymi symbolami ze zbioru $\{a, b, c, d, e, f, g\}$. Nazwy zmiennych wolnych pozostawić bez zmian:

$$44. x > y \vee \forall_x x > y$$

$$47. x = z \vee (\exists_x x > y) \vee (\forall_x x < y) \wedge (\forall_x \exists_z x + y < z)$$

$$45. x < y \wedge y < z \wedge \exists_y \forall_z y < x + z$$

$$48. xy < z \vee (\exists_x (x > z \vee (\forall_x x < y)))$$

$$46. x > z \vee (\forall_x x > y) \vee (\exists_x x < y)$$

$$49. zx > y \vee (\forall_x (x > 1 \vee (\exists_x x < z) \vee (\exists_x x > y)))$$

Następujące wyrażenia wykazać za pomocą indukcji matematycznej:

$$50. n \text{ prostych na płaszczyźnie przecina się w co najwyżej } \frac{n(n-1)}{2} \text{ punktach.}$$

$$53. n^3 + 2n \text{ jest podzielne przez } 3.$$

$$54. n^3 + 3n^2 + 2n \text{ jest podzielne przez } 6.$$

$$51. 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

$$55. \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$$

$$52. \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$56. \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n-1} < \frac{2}{3}n\sqrt{n}$$

57. Dany jest ciąg a_n , taki że $a_0 = 3$, $a_1 = 5$, oraz rekurencyjnie: $a_{n+1} = 4a_n - 3a_{n-1}$.
Wykazać, że $a_n = 3^n + 2$.

58. Dany jest ciąg a_n , taki że $a_0 = 2$, $a_1 = 5$, oraz rekurencyjnie: $a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}$.
Wykazać, że $a_n = 2^n + 3^n$.

59. Dane są ciągi:

$$a_n, \text{ taki że } a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 2, \text{ oraz rekurencyjnie: } a_{n+1} = 2a_n - a_{n-2}.$$

$$b_n, \text{ taki że } b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 2, \text{ oraz rekurencyjnie: } b_{n+1} = -a_n + 3a_{n-1} + 2a_{n-2}.$$

Wykazać, że $a_n = b_n$.

Wskazówka: wykazać jednocześnie, że $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ i $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$.