

Zadania ze Wstępu do Matematyki; Zestaw 4i5i?

Proszę zaznaczyć na osi liczbowej następujące liczby i zbiory:

- | | | | |
|---------|------------------|----------------------------------|---------------------------------|
| 1. 5 | 3. $\frac{7}{4}$ | 5. $[1, 3)$ | 8. $[1, 3) \cup (4, 6]$ |
| | | 6. $(-4, 2)$ | 9. $(1, 5) \cap [3, 6]$ |
| 2. -3 | 4. $\sqrt{7}$ | 7. $[1, \infty) \setminus \{3\}$ | 10. $(1, 15) \setminus (5, 10)$ |

Proszę rozwiązać równania, wskazać zbiór rozwiązań oraz zaznaczyć na osi liczbowej. Z wyjątkiem ostatniego równania należy korzystać z interpretacji modułu jako odległości:

- | | | |
|-------------------|-------------------------|------------------------------|
| 11. $ x = 3$ | 13. $ x - 1 = x - 5 $ | 15. $ x - 2 = -1$ |
| 12. $ x - 2 = 1$ | 14. $ x - 3 = 0$ | 16. $ x - 1 + 2x - 7 = 5$ |

Proszę rozwiązać nierówności, wskazać zbiór rozwiązań oraz zaznaczyć na osi liczbowej. Należy korzystać z interpretacji modułu jako odległości:

- | | | | |
|----------------------|-------------------------|-------------------------|------------------------------|
| 17. $ x < 1$ | 20. $ x + 5 > 3$ | 23. $0 < x - 3 < 4$ | 26. $ x - 2 > x - 5 + 1$ |
| 18. $ x - 2 < 1$ | 21. $ x - 1 > 2$ | 24. $5 < x - 5 < 7$ | |
| 19. $ x - 3 \leq 2$ | 22. $ x - 1 < x - 3 $ | 25. $ x + 2 < x - 5 $ | 27. $ x + 1 - 2x + 7 > 1$ |

Następujące ułamki proszę zapisać w postaci dziesiętnej okresowej.

- | | | | | |
|--------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 28. $\frac{13}{9}$ | 29. $\frac{37}{11}$ | 30. $\frac{65}{27}$ | 31. $\frac{89}{33}$ | 32. $\frac{72}{11}$ |
|--------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|

Następujące ułamki proszę zapisać w postaci wymiernej.

- | | | | | |
|--------------|--------------|----------------|--------------|---------------|
| 33. $3,4(4)$ | 34. $1,(25)$ | 35. $5,3(101)$ | 36. $2,(13)$ | 37. $-4,(27)$ |
|--------------|--------------|----------------|--------------|---------------|

Proszę sprowadzić następujące trójmiany kwadratowe do postaci iloczynowej: $a(x - x_1)(x - x_2)$ oraz do postaci kanonicznej: $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$ i naszkicować wykresy.

- | | | | |
|-------------------|----------------------|--------------------|----------------------|
| 38. $x^2 + x - 6$ | 39. $-2x^2 - 4x + 6$ | 40. $3x^2 + x + 2$ | 41. $-2x^2 - 5x - 1$ |
|-------------------|----------------------|--------------------|----------------------|

Proszę rozwiązać równania:

- | | | |
|---------------------------------|---|--|
| 42. $x^2 - 3x + 1 = 0$ | 46. $2x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$ | 49. $\frac{2x^2 + 5x - 11}{x - 2} = x + 3$ |
| 43. $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ | 47. $3x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = 0$ | |
| 44. $x^3 + x^2 - 7x + 2 = 0$ | | |
| 45. $x^3 - 3x^2 - 7x + 6 = 0$ | 48. $\frac{2x^2 + 2x - 4}{x + 1} = x + 2$ | 50. $\frac{3x^2 + 6x - 7}{x + 3} = x - 2$ |

Proszę rozwiązać nierówności:

- | | | |
|-----------------------------------|---|--|
| 51. $x^2 - 8x + 15 > 0$ | 53. $\frac{x + 5}{x - 3} < \frac{x - 2}{x + 1}$ | 55. $\frac{x^2 + 2}{2x + 1} < \frac{2 - x}{x}$ |
| 52. $2x^2 + x + 1 < x^2 + 2x + 7$ | 54. $\frac{x^2 + 5}{x - 1} > 2x + 1$ | |

Które z następujących relacji $R \subseteq A \times B$ są funkcjami $f : A \rightarrow B$?

56. $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y\}$, $R = \{(a, x), (b, x), (c, y)\}$

57. $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b, c\}$, $R = \{(a, c), (b, b), (c, c)\}$

58. $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y\}$, $R = \{(a, x), (b, y)\}$

59. $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y, z, t\}$, $R = \{(a, y), (b, z), (c, x), (a, t)\}$

60. $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, $R = \{(x, y) \mid y = x^2\}$

61. $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, $R = \{(x, y) \mid x = y^2\}$

62. $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, $R = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x}\}$

63. $A = [0, \infty)$, $B = \mathbb{R}$, $R = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x}\}$

Dla danej funkcji f znaleźć obraz zbioru A i przeciwobraz zbioru B .

64. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $A = [1, 2)$, $B = (2, 3]$

65. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $A = (-3, 2]$, $B = (-1, 5)$

66. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $A = (-9, -2]$, $B = [-10, 0]$

67. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $A = (-5, 5)$, $B = [-3, -1]$

68. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, $A = [-2, 3]$, $B = [-2, 3]$

69. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x + 1$, $A = [0, 1]$, $B = \{7\}$

Zbadać parzystość i nieparzystość funkcji:

70. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2$

73. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_3(\sqrt{x^2 + 1})$

71. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + 4x^3 - 6x$

74. $f : [-3, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$

72. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^6 - 3x^4 + 5x^2 - 3$

75. $f : (-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

Dane są funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Funkcje f i g są rosnące a funkcja h jest malejąca. Proszę rozwiązać równania i nierówności:

76. $f(x^2 - 1) = f(1 - x)$

79. $h(2x - 3) > h(3x - 2)$

77. $f(h(x + 2)^3 + 3) = f(h(5 - x)^3 + 3)$

80. $g(h(f(x + 5) - 3 + x) + x^2) + 5 >$

78. $f(2x - 3) > f(3x - 2)$

$> g(h(f(7 - x) - 3 + x) + x^2) + 5$

Znaleźć funkcję odwrotną do f , wskazać jej dziedzinę i przeciwdziedzinę.

81. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 7$

84. $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{5\}$, $f(x) = \frac{5x - 3}{x + 2}$

82. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 3)^3 - 5$

85. $f : [3, \infty) \rightarrow [-8, \infty)$, $f(x) = x^2 + 6x + 1$

83. $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, $f(x) = \frac{3x + 5}{3 - x}$

86. $f : (-\infty, 0] \rightarrow [\sqrt{5}, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$

Proszę naszkicować wykresy funkcji (w tym wskazać odpowiednią dziedzinę):

87. x^5

91. $x^{\frac{3}{5}}$

95. $x^{-\frac{5}{3}}$

88. $x^{\frac{3}{2}}$

92. $x^{-\frac{5}{4}}$

96. $x^{-\frac{9}{4}}$

89. $x^{-\frac{7}{11}}$

93. $x^{\frac{13}{5}}$

90. $x^{\frac{3}{4}}$

94. x^8

97. Proszę obliczyć średnią arytmetyczną, geometryczną i harmoniczną z liczb 4, 6 i 9.

98. Proszę obliczyć średnią ważoną z liczb 5, 4, 3 i 2 z wagami 1, 2, 3 i 4.

Przypomnijmy nierówności pomiędzy średnimi. Dla dowolnych liczb dodatnich x_i oraz $1 \leq p < q$ mamy:

$$\min\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \leq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \left(\frac{x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p}{n} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{x_1^q + x_2^q + \dots + x_n^q}{n} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Proszę wskazać i uzasadnić nierówności pomiędzy podanymi parami wyrażeń. Wszystkie litery oznaczają liczby dodatnie.

99. $\sqrt[3]{abc}$ i $\frac{a+b+c}{3}$

102. $\sqrt[3]{ab^2}$ i $\frac{a+2b}{3}$

100. $\frac{3abc}{ab+bc+ac}$ i $\sqrt[3]{abc}$

103. $\sqrt[4]{ab^3}$ i $\frac{a+3b}{4}$

101. $\frac{1}{3}(a+b+c)^2$ i $a^2+b^2+c^2$

104. $6\sqrt[6]{ab^2c^3}$ i $a+2b+3c$

105. $3\sqrt[3]{(abc)^2}$ i $ab+bc+ac$

Zadanie dodatkowe dla bardzo dociekliwych:

106. $a^2bc + ab^2c + abc^2$ i $a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2$