

1 Funkcja wykładnicza i logarytm

- Rozwiązać równania; (a) $\sqrt{x+3} = 3$; (b) $\sqrt{x^2+9} = 5$; (c) $3 - \sqrt{x-1} = \sqrt{3x-2}$
- Rozwiązać nierówności: (a) $\sqrt{2x-1} > 2$; (b) $\sqrt{2x+3} > x+2$; (c) $\sqrt{\frac{3x-4}{3-x}} > 1$.
- Znając wykres funkcji $y = 3^x$ sporządzić wykresy funkcji: (a) $y = 3^{x-1}$; (b) $y = 3^{|x|}$; (c) $y = 3^{-|x|}$
- Rozwiązać równania: (a) $6^{x+1} + 6^{1-x} = 37$; (b) $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$; (c) $3^{2x-1} + 3 \cdot 3^x = 12$
- Rozwiązać nierówności: (a) $3^x > 27$; (b) $9^4 < \sqrt{3}$; (c) $3^{x+4} < 3^{1-x}$
- Podać dziedzinę oraz sporządzić wykres funkcji: (a) $y = \log_2 |x|$; (b) $y = \log_2 |x+1|$; (c) $y = \log_{1/2}(1-x)$
- Obliczyć wartości:
(a) $\log_{10}(1/100)$; (b) $\log_{1/3} 27$; (c) $\log_{1/9}$; (d) $\log_{1/2} 1$;
(e) $\log_{1/2} 1/8$; (f) $\log_{1/8} 1/2$; (g) $\log_{\sqrt{2}} 8$; (h) $\log_{\sqrt{2}/2} 8$.
- Wyznaczyć dziedzinę funkcji:
 $f(x) = \log_{10}(x^2 - 4) + \sqrt{6 - 2x}$; $g(x) = \sqrt{\log_{10}(9 - x)}$; $h(x) = \sqrt{\log_3 |x - 2|}$
- Rozwiązać równanie:
(a) $\log_{10}(x-3) - \log_{10}(2-3x) = 1$; (b) $\log_{10}(54 - x^2) = 2 \log_{10} x$;
(c) $\frac{\log_{10} 7x}{\log_{10}(2x-7)} = 2$; (d) $\frac{\log_{10}(2x-5)}{\log_{10}(x^2-8)} = \frac{1}{2}$

2 Funkcje trygonometryczne

1. Podać wartości: $\sin 300^0$; $\cos 120^0$; $tg(-135^0)$; $\cos 1440^0$; $\sin(-300^0)$; $tg(-249)$
2. Obliczyć $\sin(x)$ wiedząc, że $tg(x) = 15/8$ oraz $x \in (0; \pi/2)$
3. Obliczyć $\sin(x)$ wiedząc, że $tg(x) = -3/4$ oraz $x \in (\pi/2; \pi)$
4. Obliczyć $\cos(x)$ wiedząc, że $tg(x) = 1/2$ oraz $x \in (\pi; 3\pi/2)$
5. Obliczyć $tg(x)$ wiedząc, że $\cos(x) = \sqrt{3}/2$ oraz $x \in (-\pi/2; 0)$
6. Uprościć wyrażena:

$$\sin^2 x \cos x + \cos^3 x ; \cos x \sqrt{1 + tg^2 x} ; (1 - \sin x)(1 + \sin x) ; \frac{1}{\cos^2 x} - 1 ; \frac{1 - \sin^2 x}{1 - \cos^2 x} ; \frac{\sin x \cos 2x}{\cos x \sin 2x}$$

7. Narysować wykresy funkcji:

$$f(x) = \sin 2x ; g(x) = \sin(x + \pi/4) ; h(x) = 2 - \sin x ;$$
$$j(x) = \sin |x| ; k(x) = \sin x + |\sin x| ; l(x) = \frac{\cos x}{|\cos x|}$$

8. Znając wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30^0 , 45^0 ; 60^0 obliczyć stosując odpowiednie wzory : $\cos(15^0)$; $\sin(75^0)$; $tg(15^0)$
9. Obliczyć wartości podanych wyrażeń stosując odpowiednie wzory : (a) $\sin 12^0 \cos 18^0 + \cos 12^0 \sin 18^0$; (b) $\cos^2 15^0 - \sin^2 15^0$; (c) $\frac{tg85^0 + tg25^0}{1 - tg85^0 \cdot tg25^0}$
10. Obliczyć $\sin 2x$ i $\cos 2x$ jeśli $\sin x = 0,6$ oraz x jest kątem ostrym.
11. Podać wartości funkcji:
 - (a) $\arcsin(1/2)$; $\arcsin(-\sqrt{2}/2)$; $\arcsin \sqrt{3}$;
 - (b) $\arccos 0$; $\arccos 1$; $\arccos(-1/2)$; $\arccos(-\sqrt{2}/2)$
 - (c) ; $\arctan 1$; $\arctan \sqrt{3}$; $\arctan(-\sqrt{3}/3)$

3 Miscellanea

1. Obliczyć wartości symboli Newtona:

(a) $\binom{5}{2}$ $\binom{10}{4}$ [10 ; 210]

(b) $\binom{20}{18}$ $\binom{100}{97}$ [190 ;161700]

(c) $\binom{100}{3}$ [161700]

porównać dwa ostatnie wyniki i wyjaśnić .

2. Obliczyć wartości: $\binom{7}{2}$, $\binom{185}{184}$, $\binom{n+2}{2}$, $\binom{n+2}{n}$,

3. Uprościć wyrażenia: $\frac{(n+1)!(2n)!}{2n!(2n-1)!}$; $\frac{(n!)^2}{(n-1)!(n+1)!}$

4. Rozwinąć wyrażenia: $(a+2)^5$; $(a-1)^6$; $(\sqrt{2}-1)^6$; $(1-\sqrt{3}x)^4$.

5. Obliczyć:

$(a-b)^5$; $(1-a)^7$; $(1-\sqrt{2})^6$

6. Obliczyć współczynnik przy x^2 w rozwinięciu sumy $(1-x)^{20}$.

7. Uzasadnić , że dla dowolnej liczby naturalnej zachodzą równości:

(a) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$

(b) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n - 1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$

(c) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$

(d) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$

8. Uzasadnić , że dla dowolnej liczby naturalnej n jest prawdziwe:

(a) liczba $n^4 + 5$ jest podzielna przez 3.

(b) liczba $n^3 + 3n^2 + 2n$ jest podzielna przez 6,

(c) liczba $10^n - (-1)^n$ jest podzielna przez 11.

4 Granica ciągu

1. Kiedy ciągi : $a_n = n/(2n + 1)$, $b_n = 3n/(2n - 1)$, $c_n = (2 - n)/(2 + n)$ różnią się od swoich granic mniej aniżeli:

(a) $1/100$

[25 ; 76 ; 399]

(b) $\epsilon > 0$

2. Obliczyć granice ciągów :

(a) $a_n = \frac{2n^2 + n + 5}{n^2 + 1}$ [2]

(b) $b_n = \frac{(3n - 1)(2n + 1)}{(n + 2)(6n + 2)}$ [1]

(c) $c_n = \sqrt{\frac{4n + 5}{n + 1}}$ [2]

(d) $d_n = \frac{(\sqrt{n} + 5)^2}{n + 1}$ [1]

(e) $e_n = \frac{\sqrt{(4n^2 + 3) \cdot (2n - 3)}}{(3n + 1)\sqrt{n(n + 5)}}$ [4/3]

(f) $f_n = n - \sqrt{n^2 - 5}$ [0]

(g) $g_n = \sqrt{n^2 + 5n + 1} - \sqrt{n^2 - 1n + 4}$ [3]

(h) $h_n = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$ [e^{-2}]

(i) $i_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$ [1]

(j) $j_n = \left(\frac{n - 2}{n + 3}\right)^n$ [e^{-5}]

(k) $k_n = \left(\frac{n}{n + 1}\right)^n$ [e^{-1}]

(l) $l_n = \left(\frac{n + 7}{n + 9}\right)^{3n+1}$ [e^{-6}]

(m) $m_n = \left(\frac{n + 1}{2n + 5}\right)^n$ [0]

(n) $p_n = \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n}$ [3/4]

(o) $q_n = \left(\frac{n^2}{n^2 - 1}\right)^{2n^2+3}$ [e^{-2}]

5 Zbieżność szeregów

1. Przedstawić w postaci ułamka liczby :

$$0,77(7) \quad , \quad 0,3535(35) \quad , \quad 0,13232(32)$$

$$[7/9 \quad , \quad 35/99 \quad , \quad 419/990]$$

2. Wypisać wzór na n-tą sumę częściową szeregów i obliczyć sumę szeregu nieskończonego:

$$(a) \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{2}{3^k} \quad [1]$$

$$(b) \quad S_n = \sum_{k=1}^n \left(-\frac{3}{4}\right)^k \quad [-3/7]$$

$$(c) \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \quad [1/2]$$

3. Zbadać zbieżność szeregów porównując je z szeregami postaci $\sum \frac{1}{n^\alpha}$

$$(a) \quad \sum \frac{1}{n(n+2)} \quad , \quad \sum \frac{n+2}{2n^3+7} \quad , \quad \sum \frac{n-1}{n^3+1} \quad \text{zb. , zb. , zb.}$$

$$(b) \quad \sum \frac{n-1}{n^3+1} \quad , \quad \sum \frac{n+1}{n^2+1} \quad , \quad \sum \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \quad \text{zb. , rozb. , rozb.}$$

4. Zbadać zbieżność szeregów.

$$(a) \quad \sum \frac{n-1}{(n+1)(\sqrt{n}+2)} \quad , \quad \sum \frac{2n^2+3n+4}{n^5+n^3+1} \quad , \quad \sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}} \quad [\text{rozb. , zb., zb.}]$$

$$(b) \quad \sum \frac{3^n}{n!} \quad , \quad \sum \frac{n!}{(2n)!} \quad , \quad \sum \frac{n(n+1)}{2^n} \quad [\text{zb. , zb. zb.}]$$

$$(c) \quad \sum \left(\frac{3n+1}{2n+1}\right)^n \quad , \quad \sum \frac{n \cdot 5^n}{2^n \cdot 3^{n+1}} \quad , \quad \sum \frac{n^{10}}{10^n} \quad [\text{rozb., zb., zb.}]$$

$$(d) \quad \sum \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} \quad , \quad \sum (-1)^n (\sqrt[n]{3} - 1) \quad , \quad \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot \ln(n+1)} \quad [\text{zb. , zb. , zb.}]$$

6 Granica i ciągłość funkcji

1. Dla ustalonego $\epsilon > 0$ dobrać, o ile to możliwe, liczbę $\delta > 0$ tak aby z nierówności $|x - x_0| < \delta$ wynikało $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

(a) $f(x) = x^2, x_0 = 2, \epsilon = 0,01$

(b) $f(x) = 1/x, x_0 = 1/2, \epsilon = 0,1$

(c) $f(x) = \text{sign}(x), x_0 = 0, \epsilon = 0,1$

2. Obliczyć granice funkcji:

(a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x + 2}{x^3 + x - 3}; \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - x + 6}{x^3 - 4x}$ [6; -2; 11/8]

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}; \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x + 2; \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x + 2$ [1/2, ∞ , 2]

(c) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x}; \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{\pi/2 - x}; \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{3/x};$ [1/2; 1; e^6]

3. Czy dla funkcji $f(x)$ można tak dobrać wartość w punkcie x_0 aby uzyskana funkcja była ciągła?

(a) $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}, x_0 = -2$

(b) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sin 3x}{2x}, x_0 = 0$

(c) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1 + 2^{1/x}}, x_0 = 0$

7 Pochodna

1. Wprost z definicji obliczyć pochodną funkcji

(a) $f(x) = x^2$ w punkcie $x_0 = 3$

(b) $f(x) = x^3$ w punkcie $x_0 = 2$

(c) $f(x) = \frac{1}{x}$ w punkcie $x_0 = 2$.

2. Znaleźć styczną do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ w punkcie $x_0 = 4$.

3. Wyznaczyć wszystkie punkty dla których styczna do wykresu funkcji $y = \sin(x)$ jest równoległa do prostej $y = x$.

4. Pod jakim kątem wykres danej funkcji przecina oś Ox.

(a) $\sin 3x$; $\operatorname{tg} x$;

(b) $\ln |x|$; $1 - e^x$;

5. Obliczyć pochodne funkcji

(a) $2x^3 + 5x^2 - x + 7$; $\sqrt{x^3}$; x^3/\sqrt{x}

(b) $3 \sin x + 5 \cos x$; $x \cdot \ln x$; $x^2 \cdot e^x$

(c) $\sin x/\sqrt{x}$; $\cos x/(1+x^2)$; $\cos^2(3x)$;

(d) $\sin(x^2 + 4)$; $\operatorname{tg}^3(x^2 + 1)$; $x \cdot e^{-x^2}$.

6. Znaleźć dziedzinę przedziały wzrostu i malenia funkcji oraz jej extrema lokalne

(a) $f(x) = x \cdot e^{-3x}$; e^x/x ; $f(x) = x^2 \cdot e^{-x^2}$

(b) $x^2 - 10 \cdot \ln x$; $x/\ln x$

7. Obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia :

(a) $\sqrt[3]{26,19}$; (b) $\ln(1,05)$; (c) $\sqrt[4]{16,64}$; (d) $\sqrt{6,76}$

8. Znaleźć extrema lokalne (nie używając drugiej pochodnej)

(a) $2x^3 - 2x^2$, (b) $x - \ln(1+x)$, (c) $(1 - 2x + x^2)/2x$, (d) $(x^2 - 1)/x$

9. Znaleźć extrema lokalne (stosując drugą pochodną)

(a) $x^3 - 2x^2 + x$; (b) $x + \sqrt{1-x}$, (c) $(\ln x)^2 - \ln x$

10. Znaleźć extrema oraz punkty przegięcia funkcji :

(a) $-x^3 + x^2$; (b) $2x/(x^2 + 1)$; (c) $x \cdot \sqrt{4-x^2}$

11. Wyznaczyć przedziały wypukłości funkcji:

(a) $x^4 - 4x^3 + 4x^2$; (b) $x^4 e^{-x}$; (c) $x \ln x$

Odpowiedzi.

Zad 3. $x = 2k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$

Zad 4. $\arctan 3$ dla $x = 2k\pi$, $-\arctan 3$ dla $x = (2k+1)\pi$; $\pi/4$; $\pi/4$; $-\pi/4$

Zad 5. (a) $6x^2 + 10x - 1$; $3/2 \cdot \sqrt{x}$; $5/2 \cdot x^{3/2}$

(b) $3 \cos x - 5 \sin x$; $\ln x + 1$; $(x^2 + 2x)e^x$

(c) $x^{-1/2} \cdot \cos x - 1/2 \cdot x^{-3/2} \cdot \sin x$; $-(\sin x \cdot (1+x^2) + \cos x \cdot 2x)/(1+x^2)^2$; $-3 \sin(6x)$.

(d) $2x \cdot \cos(x^2 + 4)$; $6 \tan^2(x^2 + 1)/\cos(x^2 + 1)$; $e^{-x^2}(1 - 2x^2)$

8 Zbadać przebieg zmienności funkcji oraz sporządzić ich wykresy.

1. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$

2. $f(x) = 3 - 4/x - 4/x^2$

3. $f(x) = (x-1)^2(x+2)$

4. $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$

5. $f(x) = \frac{(x+1)^2}{2x}$

6. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

7. $g(x) = x \cdot e^{-2x}$

8. $h(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

9. $k(x) = x \cdot \sqrt{1-x^2}$

Odpowiedzi.

- $D = [0, 1) \cup (1, \infty)$; asymptoty $x = 1, y = 0$; funkcja malejąca; wypukła w $(0, 1 - 2/\sqrt{3})$, $(1, \infty)$ wklęsła w $(1 - 2/\sqrt{3}, 1)$
- $D = \mathbb{R} \setminus 0$; asymptoty $y = 3, x = 0$; maleje w $(-2, 0)$ rośnie w $(-\infty, -2)$ i $(0, \infty)$; wypukła w $(-\infty, -2)$ wklęsła w $(-2, 0)$ i $(0, \infty)$.
- $D = \mathbb{R}$; brak asymptot ; rośnie w $(-\infty, -1)$ i $(1, \infty)$, maleje w $(0, 1)$; wypukła w $(0, \infty)$, wklęsła w $(-\infty, 0)$.
- $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; asymptota $x = 1$; maleje w $(-\infty, 1)$ i w $(1, 3/2)$, rośnie w $(3/2, \infty)$; wypukła w $(-\infty, 0)$ i $(1, \infty)$, wklęsła w $(0, 1)$.
- $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; asymptota $y = x/2 + 1$; rośnie w $(-\infty, -1)$ i $(1, \infty)$, maleje w $(-1, 0)$ i $(0, 1)$, wypukła dla w $(0, \infty)$ wklęsła w $(-\infty, 0)$.

9 Szereg Taylora

1. Znaleźć trzy pierwsze wyrazy rozwinięcia funkcji $\operatorname{tg}x$ w szereg Taylora w punkcie 0 .
2. Podać wzór Taylora dla danej funkcji, w punkcie x_0 oraz liczby n

(a) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$; $n = 5$,

(b) $g(x) = \cos x$, $x_0 = \pi$; $n = 6$,

(c) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$; $n = 3$,

(d) $k(x) = \ln(1+x)$, $x_0 = 0$; $n = 5$,

3. Jaki błąd popełniamy zastępując:

(a) $\sin x \cong x - x^3/3! + x^5/5!$ dla $|x| \leq 1$ [$1/7! \approx 1,98 \cdot 10^{-4}$]

(b) $\cos x \cong 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6!$ dla $|x| \leq 1/2$ [$1/(8! \cdot 2^8) \approx 9,8 \cdot 10^{-8}$]

(c) $\ln(1+x) \cong x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4$ dla $|x| \leq 0.1$ [$1/(5 \cdot 10^{-5})$]

4. Obliczyć

(a) e z dokładnością do 10^{-7} [2,17192818]

(b) $\sqrt{10}$ z dokładnością do 10^{-3} [3,162]

(c) $\sqrt[3]{127}$ z dokładnością do 10^{-3} [1,369]

(d) $\sqrt[3]{e}$ z dokładnością do 10^{-3} [2,17192818]

(e) $\ln 1,3$ z dokładnością do 10^{-3} [0,262]

10 Całka

1. Znaleźć funkcje pierwotne i sprawdzić wynik poprzez różniczkowanie:

(a) $\int (x^2 - 3x + 4)dx$; $\int (x^3 + \sqrt{x})dx$; $\int \sqrt{\sqrt{x}}dx$; $\int 2\sqrt[3]{x}dx$; $\int 2\sqrt[3]{x}dx$;

(b) $\int (7x + 2)^4 dx$; $\int \sin(4x)dx$; $\int 3x(x^2 + 4)^4 dx$; $\int x\sqrt{x^2 + 1}dx$; $\int (7x + 2)^4 dx$; $\int \frac{x}{x^2 + 1} dx$;

(c) $\int x \cdot e^x dx$; $\int x \cdot e^{-2x} dx$; $\int x \cdot \sin 3x dx$; $\int x \cdot e^x dx$; $\int x \cdot \ln x dx$; $\int x^2 \cdot e^x dx$

(d) $\int \frac{2dx}{x^2 + 2}$; $\int \frac{(5x + 3)dx}{x^2 - 9}$; $\int \frac{xdx}{x^2 - 6x + 10}$; $\int \frac{2dx}{x^2 + 2}$; $\int \frac{xdx}{x^2 + 2x + 8}$; $\int \frac{x^2 dx}{x + 1}$

2. Obliczyć pole :

(a) powierzchni zawartej między liniami $y = x^3$, $y = 4x$ [8]

(b) powierzchni zawartej między liniami $y = 2x^3$, $y^4 = 4x$ [5/6]

(c) ograniczone parabolami $y^2 = 8x$, $x^2 = 8y$ [64/3]

(d) obszaru ograniczonego przez linie $y = x^2$, $y = x^2/2$, $y = 3x$, [27/2]

(e) obszaru ograniczonego przez linie $y = 2x - x^2$, $x + y = 0$, [9/2]

3. Obliczyć objętość bryły ograniczonej przez powierzchnię powstałą przez obrót paraboli $x = y^2$ wokół osi Ox oraz płaszczyznę $x = a$ [$\pi a^5/5$]

4. Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót sinusoidy $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) wokół osi Ox [$\pi^2/2$]

5. Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót hiperboli $y = 1/x$ ($1 \leq x < \infty$) wokół osi Ox oraz płaszczyznę $x = 1$ [π]