

Zadania ze Wstępu do Matematyki; Zestaw W3

Proszę zaznaczyć na osi liczbowej następujące liczby i zbiory:

- | | | | |
|---------|------------------|----------------------------------|---------------------------------|
| 1. 5 | 3. $\frac{7}{4}$ | 5. $[1, 3)$ | 8. $[1, 3) \cup (4, 6]$ |
| | | 6. $(-4, 2)$ | 9. $(1, 5) \cap [3, 6]$ |
| 2. -3 | 4. $\sqrt{7}$ | 7. $[1, \infty) \setminus \{3\}$ | 10. $(1, 15) \setminus (5, 10)$ |

Proszę rozwiązać równania, wskazać zbiór rozwiązań oraz zaznaczyć na osi liczbowej. Z wyjątkiem dwóch ostatnich równań należy korzystać z interpretacji modułu jako odległości:

- | | | |
|-------------------------|------------------------------|------------------------------|
| 11. $ x = 3$ | 14. $ x - 3 = 0$ | 17. $ x + 1 - 2x + 7 = 1$ |
| 12. $ x - 2 = 1$ | 15. $ x - 2 = -1$ | |
| 13. $ x - 1 = x - 5 $ | 16. $ x - 1 + 2x - 7 = 5$ | |

Proszę rozwiązać nierówności, wskazać zbiór rozwiązań oraz zaznaczyć na osi liczbowej. Należy korzystać z interpretacji modułu jako odległości:

- | | | | |
|-------------------|----------------------|-------------------------|-----------------------------|
| 18. $ x < 1$ | 20. $ x - 3 \leq 2$ | 22. $ x - 1 > 2$ | 24. $ x - 2 > x - 5 + 1$ |
| 19. $ x - 2 < 1$ | 21. $ x + 5 > 3$ | 23. $ x - 1 > x - 3 $ | |

25. Proszę obliczyć średnią arytmetyczną, geometryczną i harmoniczną z liczb 4, 6 i 9.

26. Proszę obliczyć średnią ważoną z liczb 5, 4, 3 i 2 z wagami 1, 2, 3 i 4.

Przypomnijmy nierówności pomiędzy średnimi. Dla dowolnych liczb dodatnich x_i oraz $1 \leq p < q$ mamy:

$$\min\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \leq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \left(\frac{x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p}{n} \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \left(\frac{x_1^q + x_2^q + \dots + x_n^q}{n} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Proszę wskazać i uzasadnić nierówności pomiędzy podanymi parami liczb. Wszystkie litery oznaczają liczby dodatnie.

- | | |
|---|--|
| 27. $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a + b + c}{3}$ | 30. $\sqrt[3]{ab^2} \leq \frac{a + 2b}{3}$ |
| 28. $\frac{3abc}{ab + bc + ac} \leq \sqrt[3]{abc}$ | 31. $\sqrt[4]{ab^3} \leq \frac{a + 3b}{4}$ |
| 29. $\frac{1}{3}(a + b + c)^2 \leq a^2 + b^2 + c^2$ | 32. $6\sqrt[6]{ab^2c^3} \leq a + 2b + 3c$ |
| | 33. $3\sqrt[3]{(abc)^2} \leq ab + bc + ac$ |

Zadanie dodatkowe dla bardzo dociekliwych:

1. $a^2bc + ab^2c + abc^2 \leq a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2$