Zadania ze Wstępu do Matematyki; Zestaw 11/12

Sprawdzić metodą zero-jedynkową czy następujące formuły logiczne są tautologiami:

1. $x \vee \neg x$
2. $x \wedge \neg x$
3. $(x \Rightarrow y) \iff (y \Rightarrow x)$
4. $(x \Rightarrow y) \iff (\neg y \Rightarrow \neg x)$
5. $(x \Rightarrow y) \iff (\neg y \Rightarrow x)$
6. $(x \Rightarrow y) \iff (y \Rightarrow \neg x)$
7. $(x \Rightarrow y) \iff (\neg x \vee y)$
8. $(x \Rightarrow y) \iff \neg(x \wedge \neg y)$
9. $\neg x \vee \neg y \vee (x \wedge y)$
10. $(\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y) \vee (x \wedge y)$
11. $(x \iff y) \iff (\neg x \iff \neg y)$
12. $(x \iff \neg y) \iff (\neg x \iff y)$
13. $\neg x \iff (y \Rightarrow x)$
14. $x \Rightarrow (x \vee y)$
15. $x \Rightarrow (x \wedge y)$
16. $(x \vee y) \Rightarrow x$
17. $(x \wedge y) \Rightarrow x$
18. $((x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow z)) \Rightarrow (x \Rightarrow z)$

Podać przykłady formuł zdaniowych φ, takich by spełnione były równości:
Oznaczamy: $B = \{0,1\} = \{\text{Fałsz}, \text{Prawda}\}$.

19. $\{x \in B \mid \varphi(x)\} = \{0\}$
20. $\{x \in B \mid \varphi(x)\} = \{1\}$
21. $\{x \in B \mid \varphi(x)\} = \{0,1\} = B$
22. $\{x \in B \mid \varphi(x)\} = \emptyset$
23. $\{(x,y) \in B^2 \mid \varphi(x,y)\} = \{(0,0),(1,1)\}$
24. $\{(x,y) \in B^2 \mid \varphi(x,y)\} = \{(1,0)\}$
25. $\{(x,y) \in B^2 \mid \varphi(x,y)\} = \{(0,0),(1,0),(0,1)\}$
26. $\{(x,y,z) \in B^3 \mid \varphi(x,y,z)\} = \{(0,0,0),(1,1,1)\}$
27. $\{(x,y,z) \in B^3 \mid \varphi(x,y,z)\} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

Proszę „schować” negacje pod odpowienimi nierównościami. Nie interesuje nas prawdziwość ani fałszywość wyrażeń:

28. $\neg\forall_x x > 3$
29. $\neg\exists_x x \geqslant 3$
30. $\neg\forall_x\exists_y x > 3 \vee y \leqslant x$
31. $\neg\exists_x\forall_y x \geqslant 5 \wedge x < y$
32. $\neg\forall_x\exists_y\forall_z x > z \vee y \geqslant z$
33. $\neg\exists_x\forall_y\exists_z x \geqslant z \wedge z < y$
34. $\neg\exists_x\exists_y\forall_z x = y \wedge y < z$
35. $\neg\forall_x\forall_y\exists_z x = z \vee z > y$
36. $\neg\forall_x\forall_y\forall_z x = z \wedge z = y$

W miejsce $\square$ wstawić $\Rightarrow$ lub $\Leftarrow$ lub $\iff$ tak by otrzymane wyrażenie było prawdziwe dla każdej formuły φ.

37. $\forall_x\forall_y\varphi(x,y) \;\square\; \forall_y\forall_x\varphi(x,y)$
38. $\exists_x\exists_y\varphi(x,y) \;\square\; \exists_y\exists_x\varphi(x,y)$
39. $\exists_x\forall_y\varphi(x,y) \;\square\; \forall_y\exists_x\varphi(x,y)$
40. $\exists_x\varphi(x) \vee \psi(x) \;\square\; \exists_x\varphi(x) \vee \exists_y\psi(y)$
41. $\exists_x\varphi(x) \wedge \psi(x) \;\square\; \exists_x\varphi(x) \wedge \exists_y\psi(y)$
42. $\forall_x\varphi(x) \wedge \psi(x) \;\square\; \forall_x\varphi(x) \wedge \forall_y\psi(y)$
43. $\forall_x\varphi(x) \vee \psi(x) \;\square\; \forall_x\varphi(x) \vee \forall_y\psi(y)$

W następujących wyrażeniach różne zmienne związane zastąpić różnymi symbolami ze zbioru $\{a, b, c, d, e, f, g\}$. Nazwy zmiennych wolnych pozostawić bez zmian:

44. $x > y \vee \forall_x x > y$

45. $x < y \wedge y < z \wedge \exists_y \forall_z y < x + z$

46. $x > z \vee (\forall_x x > y) \vee (\exists_x x < y)$

47. $x = z \vee (\exists_x x > y) \vee (\forall_x x < y) \wedge (\forall_x \exists_z x + y < z)$

48. $xy < z \vee (\exists_x (x > z \vee (\forall_x x < y)))$

49. $zx > y \vee (\forall_x (x > 1 \vee (\exists_x x < z) \vee (\exists_x x > y)))$

Następujące wyrażenia wykazać za pomocą indukcji matematycznej:

50. n prostych na płaszczyźnie przecina się w co najwyżej $\dfrac{n(n-1)}{2}$ punktach.

51. $1 + 3 + 5 + \ldots (2n - 1) = n^2$

52. $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \ldots \dfrac{1}{n \cdot (n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

53. $n^3 + 2n$ jest podzielne przez 3.

54. $n^3 + 3n^2 + 2n$ jest podzielne przez 6.

55. $\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$

56. $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n-1} < \dfrac{2}{3} n \sqrt{n}$

57. Dany jest ciąg a_n, taki że $a_0 = 3$, $a_1 = 5$, oraz rekurencyjnie: $a_{n+1} = 4a_n - 3a_{n-1}$.
Wykazać, że $a_n = 3^n + 2$.

58. Dany jest ciąg a_n, taki że $a_0 = 2$, $a_1 = 5$, oraz rekurencyjnie: $a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}$.
Wykazać, że $a_n = 2^n + 3^n$.

59. Dane są ciągi:
a_n, taki że $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, oraz rekurencyjnie: $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-2}$.
b_n, taki że $b_0 = 1$, $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, oraz rekurencyjnie: $b_{n+1} = -a_n + 3a_{n-1} + 2a_{n-2}$.
Wykazać, że $a_n = b_n$.
Wskazówka: wykazać jednocześnie, że $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ i $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$.