1 Funkcja wykładnicza i logarytm

1. Rozwiązać równania; (a) $\sqrt{x+3} = 3$; (b) $\sqrt{x^2+9} = 5$; (c) $3 - \sqrt{x-1} = \sqrt{3x-2}$

2. Rozwiązać nierówności : (a) $\sqrt{2x-1} > 2$; (b) $\sqrt{2x+3} > x+2$; (c) $\sqrt{\dfrac{3x-4}{3-x}} > 1$.

3. Znając wykres funkcji $y = 3^x$ sporządzić wykresy funkcji: (a) $y = 3^{x-1}$; (b) $y = 3^{|x|}$; (c) $y = 3^{-|x|}$

4. Rozwiązać równania : (a) $6^{x+1} + 6^{1-x} = 37$; (b) $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$; (c) $3^{2x-1} + 3 \cdot 3^x = 12$

5. Rozwiązać nierówności: (a) $3^x > 27$; (b) $9^4 < \sqrt{3}$; (c) $3^{x+4} < 3^{1-x}$

6. Podać dziedzinę oraz sporządzić wykres funkcji: (a) $y = \log_2 |x|$; (b) $y = \log_2 |x+1|$;
   (c) $y = \log_{1/2}(1-x)$

7. Obliczyć wartości:
   (a) $\log_{10}(1/100)$; (b) $\log_{1/3} 27$; (c) $\log_{1/9}$; (d) $\log_{1/2} 1$;
   (e) $\log_{1/2} 1/8$; (f) $\log_{1/8} 1/2$; (g) $\log_{\sqrt{2}} 8$; (h) $\log_{\sqrt{2}/2} 8$.

8. Wyznaczyć dzidzinę funkcji:
   $f(x) = \log_{10}(x^2-4) + \sqrt{6-2x}$; $g(x) = \sqrt{\log_{10}(9-x)}$; $h(x) = \sqrt{\log_3 |x-2|}$

9. Rozwiązać równanie:
   (a) $\log_{10}(x-3) - \log_{10}(2-3x) = 1$; (b) $\log_{10}(54-x^2) = 2\log_{10} x$;
   (c) $\dfrac{\log_{10} 7x}{\log_{10}(2x-7)} = 2$; (d) $\dfrac{\log_{10}(2x-5)}{\log_{10}(x^2-8)} = \dfrac{1}{2}$

2 Funkcje trygonometryczne

1. Podać wartości: $\sin 300^0$; $\cos 120^0$; $tg(-135^0)$; $\cos 1440^0$; $\sin(-300^0)$; $tg(-249)$

2. Obliczyć $\sin(x)$ wiedząc, że $tg(x) = 15/8$ oraz $x \in (0; \pi/2)$

3. Obliczyć $\sin(x)$ wiedząc, że $tg(x) = -3/4$ oraz $x \in (\pi/2; \pi)$

4. Obliczyć $\cos x)$ wiedząc, że $tg(x) = 1/2$ oraz $x \in (\pi; 3\pi/2)$

5. Obliczyć $\mathrm{tg}(x)$ wiedząc, że $cos(x) = \sqrt{3}/2$ oraz $x \in (-\pi/2; 0)$

6. Uprościć wyrażena:
   $\sin^2 x \cos x + \cos^3 x$; $\cos x\sqrt{1 + tg^2 x}$; $(1 - \sin x)(1 + \sin x)$; $\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1$; $\dfrac{1 - \sin^2 x}{1 - cos^2 x}$; $\dfrac{\sin x \cos 2x}{\cos x \sin 2x}$

7. Narysować wykresy funkcji:
   $f(x) = \sin 2x$; $g(x) = \sin(x + \pi/4)$; $h(x) = 2 - \sin x$;
   $j(x) = \sin|x|$; $k(x) = \sin x + |\sin x|$; $l(x) = \dfrac{\cos x}{|\cos x|}$

8. Znając wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30^0 , 45^0 ; 60^0 obliczyć stosując odpowiednie wzory : $\cos(15^0)$; $\sin(75^0)$; $tg(15^0)$

9. Obliczyć wartości podanych wyrażeń stosując odpowiednie wzory : (a) $\sin 12^0 \cos 18^0 + \cos 12^0 \sin 18^0$; (b) $\cos^2 15^0 - \sin^2 15^0$; (c) $\dfrac{tg85^0 + tg25^0}{1 - tg85^0 \cdot tg25^0}$

10. Obliczyś $\sin 2x$ i $\cos 2x$ jeśli $\sin x = 0,6$ oraz x jest kątem ostrym.

11. Podać wartości funkcji:

    (a) $\arcsin(1/2)$; $\arcsin(-\sqrt{2}/2)$; $\arcsin\sqrt{3}$;
    (b) $\arccos 0$; $\arccos 1$; $\arccos(-1/2)$; $\arccos(-\sqrt{2}/2)$
    (c) ; $\arctan 1$; $\arctan\sqrt{3}$; $\arctan(-\sqrt{3}/3)$

3 Miscellanea

1. Obliczyć wartości symboli Newtona:

   (a) $\binom{5}{2}$ $\qquad$ $\binom{10}{4}$ [10 ; 210]

   (b) $\binom{20}{18}$ $\qquad$ $\binom{100}{97}$ [190 ;161700]

   (c) $\binom{100}{3}$ [161700]

   porównać dwa ostatnie wyniki i wyjaśnić .

2. Obliczyć wartości: $\binom{7}{2}$, $\binom{185}{184}$, $\binom{n+2}{2}$, $\binom{n+2}{n}$,

3. Uprościć wyrażenia: $\dfrac{(n+1)!(2n)!}{2n!(2n-1)!}$; $\dfrac{(n!)^2}{(n-1)!(n+1)!}$

4. Rozwinąć wyrażenia: $(a+2)^5$; $(a-1)^6$; $(\sqrt{2}-1)^6$; $(1-\sqrt{3}x)^4$.

5. Obliczyć:
   $(a-b)^5$; $(1-a)^7$; $(1-\sqrt{2})^6$

6. Obliczyć współczynnik przy x^2 w rozwinięciu sumy $(1-x)^{20}$.

7. Uzasadnić , że dla dowolnej liczby naturalnej zachodzą równości:

   (a) $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$

   (b) $1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}$

   (c) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

   (d) $1\cdot 1!+2\cdot 2!+...+n\cdot n!=(n+1)!-1$

8. Uzasadnić , że dla dowolnej liczby naturalnej n jest prawdziwe:

   (a) liczba n^4+5 jest podzielna przez 3.

   (b) liczba n^3+3n^2+2n jest podzielna przez 6,

   (c) liczba $10^n-(-1)^n$ jeszt podzielna przez 11.

4 Granica ciągu

1. Kiedy ciągi : $a_n = n/(2n+1)$, $b_n = 3n/(2n-1)$, $c_n = (2-n)/(2+n)$ różnią się od swoich granic mniej aniżeli:

   (a) $1/100$ [25 ; 76 ; 399]

   (b) $\epsilon > 0$

2. Obliczyć granice ciągów :

   (a) $a_n = \dfrac{2n^2+n+5}{n^2+1}$ [2]

   (b) $b_n = \dfrac{(3n-1)(2n+1)}{(n+2)(6n+2)}$ [1]

   (c) $c_n = \sqrt{\dfrac{4n+5}{n+1}}$ [2]

   (d) $d_n = \dfrac{(\sqrt{n}+5)^2}{n+1}$ [1]

   (e) $e_n = \dfrac{\sqrt{(4n^2+3)} \cdot (2n-3)}{(3n+1)\sqrt{n(n+5)}}$ [4/3]

   (f) $f_n = n - \sqrt{n^2-5}$ [0]

   (g) $g_n = \sqrt{n^2+5n+1} - \sqrt{n^2-1n+4}$ [3]

   (h) $h_n = \left(1 - \dfrac{2}{n}\right)^n$ [e^{-2}]

   (i) $i_n = \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$ [1]

   (j) $j_n = \left(\dfrac{n-2}{n+3}\right)^n$ [e^{-5}]

   (k) $k_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$ [e^{-1}]

   (l) $l_n = \left(\dfrac{n+7}{n+9}\right)^{3n+1}$ [e^{-6}]

   (m) $m_n = \left(\dfrac{n+1}{2n+5}\right)^n$ [0]

   (n) $p_n = \sqrt[n]{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + \left(\dfrac{3}{4}\right)^n}$ [3/4]

   (o) $q_n = \left(\dfrac{n^2}{n^2-1}\right)^{2n^2+3}$ [e^{-2}]

5 Zbieżność szeregów

1. Przedstawić w postaci ułamka liczby :

   $0,77(7)$, $0,3535(35)$, $0,13232(32)$ [7/9 , 35/99 , 419/990]

2. Wypisać wzór na n-tą sumę częściową szeregów i obliczyć sumę szeregu nieskończonego:

   (a) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{3^k}$ [1]

   (b) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{3}{4}\right)^k$ $[-3/7]$

   (c) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ [1/2]

3. Zbadać zbieżność szeregów porównując je z szeregami postaci $\sum \frac{1}{n^\alpha}$

   (a) $\sum \frac{1}{n(n+2)}$, $\sum \frac{n+2}{2n^3+7}$, $\sum \frac{n-1}{n^3+1}$ zb. , zb. , zb.

   (b) $\sum \frac{n-1}{n^3+1}$, $\sum \frac{n+1}{n^2+1}$, $\sum \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$ zb. , rozb. , rozb.

4. Zbadać zbieżność szeregów.

   (a) $\sum \frac{n-1}{(n+1)(\sqrt{n}+2)}$, $\sum \frac{2n^2+3n+4}{n^5+n^3+1}$, $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$ [rozb. , zb., zb.]

   (b) $\sum \frac{3^n}{n!}$, $\sum \frac{n!}{(2n)!}$, $\sum \frac{n(n+1)}{2^n}$ [zb. , zb. zb.]

   (c) $\sum \left(\frac{3n+1}{2n+1}\right)^n$, $\sum \frac{n \cdot 5^n}{2^n \cdot 3^{n+1}}$, , $\sum \frac{n^{10}}{10^n}$ [rozb., zb., zb.]

   (d) $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$, $\sum (-1)^n (\sqrt[n]{3}-1)$, $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot \ln(n+1)}$, [zb. , zb. , zb.]

6 Granica i ciągłość funkcji

1. Dla ustalonego $\epsilon > 0$ dobrać, o ile to możliwe, liczbę $\delta > 0$ tak aby z nierówności $| x - x_0 | < \delta$ wynikało $| f(x) - f(x_0) | < \epsilon$.

   (a) $f(x) = x^2, x_0 = 2, \epsilon = 0,01$

   (b) $f(x) = 1/x, x_0 = 1/2, \epsilon = 0,1$

   (c) $f(x) = \mathrm{sign}(x), x_0 = 0, \epsilon = 0,1$

2. Obliczyć granice funkcji:

   (a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$; $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-x+2}{x^3+x-3}$; $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3-x+6}{x^3-4x}$ [6 ; -2 ;11/8]

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+1} - x + 2$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+1} - x + 2$ [1/2, ∞ , 2]

   (c) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{1-\sin x}{\cos^2 x}$; $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\cos x}{\pi/2 - x}$; $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{3/x}$; [1/2 ; 1 ; e^6]

3. Czy dla funkcji $f(x)$ można tak dobrać wartość w punkcie x_0 aby uzyskana funkcja była ciągła?

   (a) $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-4}$, $x_0 = -2$

   (b) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sin 3x}{2x}$, $x_0 = 0$

   (c) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1+2^{1/x}}$, $x_0 = 0$

7 Pochodna

1. Wprost z definicji obliczyć pochodną funkcji
   (a) $f(x) = x^2$ w punkcie $x_0 = 3$
   (b) $f(x) = x^3$ w punkcie $x_0 = 2$
   (c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ w punkcie $x_0 = 2$.
2. Znaleźć styczną do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ w punkcie $x_0 = 4$.
3. Wyznaczyć wszystkie punkty dla których styczna do wykresu funkcji $y = \sin(x)$ jest $r$ównoległa do prostej $y = x$.
4. Pod jakim kątem wykres danej funkcji przecina oś Ox.
   (a) $\sin 3x$; $\mathrm{tg}x$;
   (b) $\ln|x|$; $1 - e^x$;
5. Obliczyć pochodne funkcji
   (a) $2x^3 + 5x^2 - x + 7$; $\sqrt{x^3}$; $x^3/\sqrt{x}$
   (b) $3\sin x + 5\cos x$; $x \cdot \ln x$; $x^2 \cdot e^x$
   (c) $\sin x/\sqrt{x}$; $\cos x/(1 + x^2)$; $\cos^2(3x)$;
   (d) $\sin(x^2 + 4)$; $\mathrm{tg}^3(x^2 + 1)$; $x \cdot e^{-x^2}$.
6. Znaleźć dziedzinę przedziały wzrostu i malenia funkcji oraz jej extrema lokalne
   (a) $f(x) = x \cdot e^{-3x}$; e^x/x ; $f(x) = x^2 \cdot e^{-x^2}$
   (b) $x^2 - 10 \cdot \ln x$; $x/\ln x$
7. Obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia :
   (a) $\sqrt[3]{26,19}$; (b) $\ln(1,05)$; (c) $\sqrt[4]{16,64}$; (d) $\sqrt{6,76}$
8. Znaleźć ekstrema lokalne (nie używając drugiej pochodnej)
   (a) $2x^3 - 2x^2$, (b) $x - \ln(1 + x)$, (c) $(1 - 2x + x^2)/2x$, (d) $(x^2 - 1)/x$
9. Znaleźć ekstrema lokalne (stosując drugą pochodną)
   (a) $x^3 - 2x^2 + x$; (b) $x + \sqrt{1 - x}$, c) $(\ln x)^2 - \ln x$
10. Znaleźć extrema oraz punkty przegięcia funkcji :
    (a) $-x^3 + x^2$; (b) $2x/(x^2 + 1)$; (c) $x \cdot \sqrt{4 - x^2}$
11. Wyznaczyć przedziały wypukłości funkcji:
    (a) $x^4 - 4x^3 + 4x^2$; (b) $x^4 e^{-x}$; (c)$x \ln x$

Odpowiedzi.
Zad 3. $x = 2k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$
Zad 4. $\arctan 3$ dla $x = 2k\pi$, $-\arctan 3$ dla $x = (2k + 1)\pi$; $\pi/4$; $\pi/4$; $-\pi/4$
Zad 5. (a) $6x^2 + 10x - 1$; $3/2 \cdot \sqrt{x}$; $5/2 \cdot x^{3/2}$
(b) $3\cos x - 5\sin x$; $\ln x + 1$; $(x^2 + 2x)e^x$
(c) $x^{-1/2} \cdot \cos x - 1/2 \cdot x^{-3/2} \cdot \sin x$; $-(\sin x \cdot (1 + x^2) + \cos x \cdot 2x)/(1 + x^2)^2$; $-3\sin(6x)$.
(d) $2x \cdot \cos(x^2 + 4)$; $6\tan^2(x^2 + 1)/\cos(x^2 + 1)$; $e^{-x^2}(1 - 2x^2)$

8 Zbadać przebieg zmienności funkcji oraz sporządzić ich wykresy.

1. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$
2. $f(x) = 3 - 4/x - 4/x^2$
3. $f(x) = (x-1)^2(x+2)$
4. $f(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$
5. $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{2x}$
6. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
7. $g(x) = x \cdot e^{-2x}$
8. $h(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$
9. $k(x) = x \cdot \sqrt{1-x^2}$

Odpowiedzi.

1. $D = [0,1) \cup (1,\infty)$; asymptoty $x = 1$, $y = 0$;funkcja malejąca; wypukła w $(0, 1-2/\sqrt{3}), (1,\infty)$ wklęsła w $(1-2/\sqrt{3}, 1)$
2. $D = \mathbb{R} \setminus 0$; asymptoty $y = 3$, $x = 0$; maleje w $(-2,0)$ rośnie w $(-\infty,-2)$ i $(0,\infty)$; wypukła w $(-\infty,-2)$ wklęsła w $(-2,0)$ i $(0,\infty)$.
3. $D = \mathbb{R}$; brak asymptot ; rośnie w $(-\infty,-1)$ i $(1,\infty)$, maleje w $(0,1)$; wypukła w $(0,\infty)$, wklęsła w $(-\infty,0)$.
4. $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; asymptota $x = 1$; maleje w $(-\infty,1)$ i w $(1,3/2)$, rośnie w $(3/2,\infty)$; wypukła w $(-\infty,0)$ i $(1,\infty)$, wklęsła w $(0,1)$.
5. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; asymptota $y = x/2 + 1$; rośnie w $(-\infty,-1)$ i $(1,\infty)$, maleje w $(-1,0)$ i $(0,1)$, wypykła dla w $(0,\infty)$ wklęsła w $(-\infty,0)$.

9 Szereg Taylora

1. Znaleźć trzy pierwsze wyrazy rozwinięcia funkcji tg$x$ w szereg Taylora w punkcie 0 .
2. Podać wzór Taylora dla danej funkcji, w punkcie x_0 oraz liczby n
   (a) $f(x) = e^x \;\; , \;\; x_0 = 0 \;\; ; \;\; n = 5,$
   (b) $g(x) = \cos x \;\; , \;\; x_0 = \pi \;\; ; \;\; n = 6,$
   (c) $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \;\; , \;\; x_0 = 1 \;\; ; \;\; n = 3,$
   (d) $k(x) = \ln(1 + x) \;\; , \;\; x_0 = 0 \;\; ; \;\; n = 5,$
3. Jaki błąd popełniamy zastępując:
   (a) $\sin x \cong x - x^3/3! + x^5/5!$ dla $| \, x \, | \leqslant 1$ [$1/7! \approx 1,98 \cdot 10^{-4}$]
   (b) $\cos x \cong 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6!$ dla $| \, x \, | \leqslant 1/2$ [$1/(8! \cdot 2^8) \approx 9,8 \cdot 10^{-8}$]
   (c) $\ln(1 + x) \cong x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4$ dla $| \, x \, | \leqslant 0.1$ [$1/(5 \cdot 10^{-5})$]
4. Obliczyć
   (a) e z dokładnością do 10^{-7} [2,17192818]
   (b) $\sqrt{10}$ z dokładnością do 10^{-3} [3,162]
   (c) $\sqrt[3]{127}$ z dokładnością do 10^{-3} [1,369]
   (d) $\sqrt[3]{e}$ z dokładnością do 10^{-3} [2,17192818]
   (e) $\ln 1,3$ z dokładnością do 10^{-3} [0,262]

10 Całka

1. Znaleźć funkcje pierwotne i sprawdzi wynik poprzez różniczkowanie:

   (a) $\int(x^2-3x+4)dx$; $\int(x^3+\sqrt{x})dx$; $\int\sqrt{\sqrt{x}}dx$; $\int 2\sqrt[3]{x}dx$; $\int 2\sqrt[3]{x}dx$;

   (b) $\int(7x+2)^4dx$; $\int\sin(4x)dx$; $\int 3x(x^2+4)^4dx$; $\int x\sqrt{x^2+1}dx$; $\int(7x+2)^4dx$; $\int\frac{x}{x^2+1}dx$;

   (c) $\int x\cdot e^x dx$; $\int x\cdot e^{-2x}dx$; $\int x\cdot\sin 3x dx$; $\int x\cdot e^x dx$; $\int x\cdot\ln x dx$; $\int x^2\cdot e^x dx$

   (d) $\int\frac{2dx}{x^2+2}$; $\int\frac{(5x+3)dx}{x^2-9}$; $\int\frac{xdx}{x^2-6x+10}$; $\int\frac{2dx}{x^2+2}$; $\int\frac{xdx}{x^2+2x+8}$; $\int\frac{x^2dx}{x+1}$

2. Obliczyć pole :

   (a) powierzchni zawartej między liniami $y=x^3$, $y=4x$ [8]

   (b) powierzchni zawartej między liniami $y=2x^3$, $y^4=4x$ [5/6]

   (c) ograniczone parabolami $y^2=8x$, $x^2=8y$ [64/3]

   (d) obszaru ograniczonego przez linie $y=x^2$, $y=x^2/2$, $y=3x$, [27/2]

   (e) obszaru ograniczonego przez linie $y=2x-x^2$, $x+y=0$, [9/2]

3. Obliczyć objętość bryły ograniczonej przez powierzchnię powstała przez obrót paraboli $x=y^2$ wokół osi Ox oraz płąszczyznę $x=a$ [$\pi a^5/5$]

4. Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót sinusoidy $y=\sin x$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$ wokół osi Ox [$\pi^2/2$]

5. Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót hiperboli $y=1/x$ $(1\leqslant x<\infty)$ wokół osi Ox oraz płaszczyznę $x=1$ [π]