

Konspekt wykładu 3.

Ciągłość funkcji.

Definicja: Mówimy, że funkcja f jest ciągła w punkcie a jeśli $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Definicja: Mówimy, że funkcja f jest ciągła jeśli jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny.

Przykłady funkcji ciągłych:

$$x^a, a^x, \sin x, \cos x, \log x$$

$$x + y, x - y, xy, \frac{x}{y}, x^y$$

Fakt: Złożenie funkcji ciągłych jest ciągłe: jeśli dane są ciągłe funkcje $f(x)$ oraz $g(x)$ to funkcja $f(g(x))$ też jest ciągła.

Fakt: Licząc granice ciągów warto wiedzieć, że jeśli f jest funkcją ciągłą to dla każdego ciągu zbieżnego (czyli takiego, który ma granicę) a_n zachodzi równość granic:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)$$

Przykład: Funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ jest ciągła podczas gdy funkcja $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ jest nieciągła w punkcie 0.

Przykład: Dla jakich wartości a, b i c poniższa funkcja jest ciągła?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{x-2} & x < 2 \\ b & x = 2 \\ x + c & x > 2 \end{cases}$$

Rozwiązanie: Zauważamy, że w otoczeniu każdego punktu różnego od 2 funkcja f jest określona za pomocą działań arytmetycznych, które są ciągłe a więc w tych punktach funkcja jest ciągła. Granica $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją granice lewo- i prawo-stronne: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ oraz $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ i są one sobie równe. Granica lewostronna

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-a}{x-2}$ istnieje tylko wtedy gdy $a = 2$ i wynosi ona wtedy 1. Granica prawostronna $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+c) = 2+c$. Z równości granic jednostronnych mamy $1 = 2+c$ czyli $c = -1$. Ciągłość funkcji w punkcie 2, czyli równość $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ daje nam $1 = b$. Mamy więc rozwiązanie: $a = 2, b = 1$ i $c = -1$.

Uzupełnienie do poprzedniego wykładu:

Definicja: Logarytmem naturalnym nazywamy logarytm o podstawie $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n})^n$. Zapisujemy $\ln x = \log_e x$.

Pochodna funkcji.

Definicja: Pochodną funkcji f w punkcie a nazywamy granicę $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ o ile ta granica istnieje. Licząc powyższą granicę w każdym punkcie otrzymujemy nową funkcję f' nazywaną pochodną funkcji f . Mamy: $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Inne oznaczenia pochodnej:

$f'(x), \frac{df}{dx}, \frac{d}{dx} f(x), f'_x(x), (f(x))' \dots$ Druga pochodna jest to pochodna pochodnej: $f''(x) = (f'(x))'$.

Podstawiając $h = x - a$, granicę definiującą pochodną można zapisać jako $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Przykład: Niech $f(x) = x^2$. Wtedy $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} (x+a) = a+a = 2a$.

Pochodną $f'(a)$ interpretujemy jako tangens kąta pomiędzy osią odciętych (poziomą) a styczną do wykresu funkcji w punkcie $(a, f(a))$. Stąd otrzymujemy wzór na prostą styczną do wykresu funkcji w punkcie $(a, f(a))$:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Najważniejsze wzory:

$$\begin{aligned} a' &= 0 & \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \\ (af(x))' &= af'(x) & (f(g(x)))' &= f'(g(x))g'(x) \\ (f(x) + g(x))' &= f'(x) + g'(x) & (f^{-1}(y))' &= \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \\ (f(x) - g(x))' &= f'(x) - g'(x) \\ (f(x)g(x))' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \end{aligned}$$

Najważniejsze pochodne:

$$\begin{aligned} (x^a)' &= ax^{a-1} & (\cos x)' &= -\sin x \\ (a^x)' &= a^x \ln a & (\ln x)' &= \frac{1}{x} \\ (\sin x)' &= \cos x \end{aligned}$$

Uzupełniające pochodne:

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x} & (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (\operatorname{ctg} x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x} & (\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{1+x^2} \\ (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & (\operatorname{arcctg} x)' &= -\frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

Przykłady:

$$\begin{aligned} (3x^7)' &= 3 \cdot 7x^6 & (x^5 \sin x)' &= 5x^4 \sin x + x^5 \cos x \\ (3x^5 + 7 \cdot 2^x)' &= 3 \cdot 5x^4 + 7 \cdot 2^x \ln 2 & \left(\frac{x^5}{\sin x}\right)' &= \frac{5x^4 \sin x - x^5 \cos x}{\sin^2 x} \\ (x^2 \sqrt[3]{x^2})' &= (x^{\frac{8}{3}})' = \frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}} & (\cos x^3)' &= -\sin x^3 \cdot 3x^2 \\ (3 \sin x + 5 \ln x)' &= 3 \cos x + 5 \cdot \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$(\sqrt{x^3 + 2x})' = \left((x^3 + 2x)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(x^3 + 2x)^{-\frac{1}{2}}(3x^2 + 2)$$

$$(\ln^5 \sin x^7)' = 5 \ln^4 \sin x^7 \frac{1}{\sin x^7} \cos x^7 \cdot 7x^6$$

$$(x^{\sin x})' = (e^{\ln x^{\sin x}})' = (e^{\sin x \ln x})' = e^{\sin x \ln x} (\sin x \ln x)' = e^{\sin x \ln x} (\cos x \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x})$$