

Zadania z Analizy Matematycznej, Zestaw 6

11. Dla metryk na płaszczyźnie:

$$d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

$$d_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

$$d_\infty((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

znaleźć odległości pomiędzy parami punktów:

a) $(1, 1)$ i $(2, 3)$ b) $(2, -1)$ i $(2, 1)$ c) $(0, 3)$ i $(1, 4)$

12. Dla metryk z zadania 11 naszkicować kule o środku p i promieniu r :

a) $p = (1, 1)$ i $r = 1$ b) $p = (3, 5)$ i $r = 3$ c) $p = (-1, 0)$ i $r = 2$

13. Dla metryk z zadania 11 podać przykład punktu równo oddalonego od obu punktów z przykładów a-c.

14. Znaleźć odległość w metryce supremum $d(f, g) = \sup |f(x) - g(x)|$ pomiędzy następującymi parami funkcji:

a) $f, g : (0, 3) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$, $g(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

b) $f, g : [0, 8] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, $g(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 8$

c) $f, g : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 3$, $g(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 3$

d) $f, g : (1, 6) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 8$, $g(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 7$

e) $f, g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$, $g(x) = e^x$

f) $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 3)e^{-x}$, $g(x) = 3e^{-x}$

g) $f, g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 1) \ln x$, $g(x) = \ln x$

14. Podać przykład funkcji h takiej, że $d(h, f) = d(h, g)$, jeśli $f(x) = x^2 + 1$ i $g(x) = e^x$. Wszystkie funkcje są określone na przedziale $[0, 5]$.