Pochodna funkcji.

Definicja: **Pochodną (różniczką)** funkcji f w punkcie a nazywamy liczbę $f'(a)$, która jest granicą ilorazu różnicowego:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

o ile granica ta istnieje.

Zauważmy, że podstawiając $h = x - a$ otrzymujemy równoważną definicję:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Przykład:
Jeżeli $f(x) = x^2$ to mamy:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(x+a)}{x - a} = \lim_{x \to a} x + a = a + a = 2a$$

Jeżeli ta granica istnieje to funkcję f nazywamy funkcją **różniczkowalną** w punkcie a. Jeżeli funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ ma pochodną w każdym punkcie x zbioru D to mówimy, że funkcja f jest **różniczkowalna** w zbiorze D oraz, że ma **funkcję pochodną** na tym zbiorze: $f'(x)$.

Pochodna jest różnie oznaczana, poniższy ciąg równości wymienia różne sposoby zapisania tej samej pochodnej funkcji f w punkcie a:

$$f'(a) = f'_x(a) = \frac{df}{dx}(a) = (\frac{d}{dx} f)(a) = (f(x))'_{x=a} = \frac{dy}{dx}(a)$$

Geometryczna interpretacja pochodnej
Styczna do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej a, o ile istnieje, ma równanie:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Przykład:
Jeżeli chcemy znaleźć styczną do wykresu funkcji $f(x) = x^2$ w punkcie o odciętej $a = 3$ to mamy: $f(3) = 3^2 = 9$, $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$ i podstawiając do powyższego wzoru: $y = 9 + 6(x-3) = 9 + 6x - 18 = 6x - 9$. Czyli szukana styczna opisana jest równaniem:

$$y = 6x - 9$$

Fizyczna interpretacja pochodniej
Pochodna położenia względem czasu wyraża prędkość. Pochodna prędkości względem czasu wyraża przyspieszenie. Jeżeli $x(t)$, $v(t)$ i $a(t)$ opisują odpowiednio położenie, prędkość i przyspieszenie w chwili t to mamy: $v(t) = x'(t)$ i $a(t) = v'(t) = x''(t)$.

Własności funkcji różniczkowalnej.

Twierdzenie Rolle'a
Jeśli funkcja f jest ciągła na przedziale domkniętym $[a, b]$ i różniczkowalna wewnątrz tego przedziału, to znaczy na (a, b), oraz $f(a) = f(b)$ to istnieje liczba $c \in (a, b)$ taka, że:

$$f'(c) = 0$$

Twierdzenie Lagrange'a (o wartości średniej)
Jeśli funkcja f jest ciągła na przedziale domkniętym $[a, b]$ i różniczkowalna wewnątrz tego przedziału, to istnieje liczba $c \in (a, b)$ taka, że:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Podstawowe pochodne

1. $(a)' = 0$
2. $(x^a)' = ax^{a-1}$
3. $(a^x)' = a^x \ln a$
4. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
5. $(\sin x)' = \cos x$
6. $(\cos x)' = -\sin x$

Podstawowe własności pochodnej

1. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
2. $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$
3. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
4. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
5. $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$

Przykłady:

1. $(3x^7 + 5x^{-3})' = 3 \cdot 7x^6 + 5(-3) \cdot x^{-4}$
2. $(7\sin x + 5\cos x + 4)' = 7\cos x + 5(-\sin x)$
3. $(x^5 \sin x)' = 5x^4 \sin x + x^5 \cos x$
4. $\left(\dfrac{x^9}{\cos x}\right)' = \dfrac{9x^8 \cos x - x^9(-\sin x)}{\cos^2 x}$
5. $(\sin(5x^2 + 3x))' = \cos(5x^2 + 3x) \cdot (10x + 3)$
6. $(\ln \cos x)' = \dfrac{1}{\cos x}(-\sin x) = -\operatorname{tg} x$

Twierdzenie de l'Hospitala

Jeśli $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L = \lim\limits_{x\to a} g(x)$, gdzie $L \in \{-\infty, 0, +\infty\}$ oraz $a \in [-\infty, +\infty]$, to mamy:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Powyższe równanie ma sens następujący: jeśli istnieje prawa granica to istnieje również lewa granica i zachodzi równość.

W przypadku gdy spełnione są założenia twierdzenia de l'Hospitala mówimy, że mamy do czynienia z przypadkiem nieoznaczonym granicy typu $\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$.

Przykład:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 5x + 2}{x^2 + 3x - 4} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^3 - 5x + 2)'}{(x^2 + 3x - 4)'} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 - 5}{2x + 3} = -\frac{2}{5}$$

Przykład:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1$$

UWAGA!!!

Twierdzenie de l'Hospitala można stosować **wyłącznie** gdy mamy do czynienia z przypadkiem nieoznaczonym granicy typu $\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$. Poniżej ilustruję co może się zdażyć, gdy źle zastosujemy to twierdzenie:

Zły Przykład:

$$\frac{1}{7} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + 3x + 1}{x^2 + 3x + 7} \neq \lim_{x\to 0} \frac{(x^3 + 3x + 1)'}{(x^2 + 3x + 7)'} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2 + 3}{2x + 3} = 1$$

Definicja:

Funcja f jest **rosnąca** na zbiorze D jeżeli dla każdej pary $x, y \in D$ z nierówności $x < y$ wynika $f(x) < f(y)$.

Funcja f jest **malejąca** na zbiorze D jeżeli dla każdej pary $x, y \in D$ z nierówności $x < y$ wynika $f(x) > f(y)$.

Zauważmy, że funkcja rosnąca zachowuje nierówności, podczas gdy funkcja malejąca odwraca nierówności.

Twierdzenie

1. Jeśli funkcja f jest ciągła na przedziale domkniętym $[a, b]$, różniczkowalna wewnątrz tego przedziału i dla każdego $x \in (a, b)$ mamy $f(x) > 0$ to funkcja f jest malejąca na $[a, b]$.

2. Jeśli funkcja f jest ciągła na przedziale domkniętym $[a, b]$, różniczkowalna wewnątrz tego przedziału i dla każdego $x \in (a, b)$ mamy $f(x) > 0$ to funkcja f jest malejąca na $[a, b]$.