Matematyka dla Wydziału Leśnego; Wykład 1

1. Macierz wymiarów „n na k” jest to tablica $n \times k$ liczb, zapisanych w postaci:

$$A = A_{n\times k} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nk} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Dla oznaczenia macierzy A, obok prostaci rozpisanej (1) stosuje się również zapis skrócony: $A = [a_{ij}]_{n\times k}$ lub $A = [a_{ij}]$. Macierz $A_{n\times k} = [a_{ij}]_{n\times k}$ ma n **wierszy** oraz k **kolumn**. Liczby a_{ij} nazywamy **elementami** macierzy. Wskaźnik ij oznacza, że element a_{ij} znajduje się w i-tym wierszu i j-tej kolumnie.

Przykład:
$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ jest macierzą o wymiarach 2 na 3, element a_{21} jest równy 4.

Poniżej wymieniamy niektóre szczególne rodzaje macierzy i ich nazwy.

2. Macierz **zerowa** jest to macierz, której wszystkie elementy są równe 0. Taką macierz oznaczamy **0**.

Przykład:

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Macierz **kwadratowa** to taka, dla której $n = k$, czyli ma ona tyle samo wierszy co kolumn. Dla macierzy kwadratowej $A_{k\times k}$ liczbę k nazywamy **stopniem**.

4. Elementy a_{ii} macierzy kwadratowej $A_{k\times k}$, czyli elementy o równych wskaźnikach, tworzą **główną przekątną** macierzy A.

5. Macierz **diagonalna** to taka macierz kwadratowa, której wszystkie elementy poza główną przekątną są zerowe.

Przykład:

$$D = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

6. Macierz **jednostkowa** to taka macierz diagonalna, której wszystkie elementy na głównej przekątnej są równe 1. Macierz jednostkową $k \times k$ oznaczamy $I_{k\times k}$ lub w skrócie I.

7. Wektorem nazywamy macierz, która ma tylko jedną kolumnę.

Przykład:

$$v = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

8. Wektorem **jednostkowym** lub **wersorem** nazywamy wektor, którego jeden element jest jedynką a pozostałe zerami. Kolumny macierzy jednostkowej są wersorami.

9. Macierz nazywamy **górnotrójkątną** jeśli wszystkie jej elementy poniżej głównej przekątnej są zerami, **dolnotrójkątną** jeśli wszystkie jej elementy powyżej głównej przekątnej są zerami.

Przykład:

$$\text{górnotrójkątna: } \begin{bmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{dolnotrójkątna: } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

9. Macierzą **transponowaną** do macierzy $A = [a_{ij}]$ nazywamy macierz $A^T = [a_{ji}]$, w której wiersze macierzy A zostały ustawione w kolumnach.

Przykład:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

10. Macierzą **symetryczną** nazywamy taką macierz A, która jest równa macierzy do niej transtponowanej: $A = A^T$.

Przykład:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

11. Dodawanie macierzy. Sumą macierzy A i B nazywamy macierz $A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$. Uwaga: dodawanie ma sens tylko gdy dodawane macierze mają te same wymiary.

Przykład:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 5 \\ 5 & 12 & 11 \end{bmatrix}$$

12. Mnożenie macierzy przez liczbę. Aby pomnożyć macierz przez liczbę a należy wszystkie jej elementy pomnożyć przez a: $aA = a[a_{ij}] = [aa_{ij}]$

Przykład:

$$3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{bmatrix}$$

Uwaga: odejmowanie macierzy można określić jako $A - B = A + (-1)B$.

13A. Iloczyn wiersza przez kolumnę. Iloczynem wiersza $[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n]$ przez kolumnę $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ jest liczba $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \ldots + a_n b_n$.

Przykład:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 4 + 10 + 18 = 32$$

13B. Iloczyn macierzy. Iloczynem macierzy $A = [a_{ik}]_{n \times r}$ oraz $B = [b_{kj}]_{r \times m}$ nazywamy macierz $C = [c_{ij}]_{n \times m}$, której elementami są iloczyny wierszy lewego składnika i kolumn prawego składnika:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + a_{i3} b_{3j} + \ldots + a_{ir} b_{rj}$$

Uwaga: mnożenie macierzy ma sens tylko wtedy, gdy liczba kolumn lewego składnika iloczynu jest równa liczbie wierszy prawego składnika. Innymi słowy, kiedy długość wiersza lewego składnika jest równa długości kolumny prawego składnika.

Przykład:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Obliczając iloczyn macierzy wygodnie jest umieścić mnożone macierze w taki sposób by wynik mnożenia wiersza przez kolumnę wpisywać na prawo od wiersza i pod kolumną, które mnożymy. Dla powyższego iloczynu zapis ten wygląda następująco:

$$\begin{array}{cc|ccc} & & 2 & 1 & 0 \\ & & -1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

14. Własności działań na macierzach

Przy założeniu wykonalności działań prawdziwe są następujące równości:

1.	$0 + A = A$	macierz zerowa jest elementem neutralnym dodawania
2.	$A + B = B + A$	dodawanie macierzy jest przemienne
3.	$A + (B + C) = (A + B) + C$	dodawanie macierzy jest łączne
4.	$IA = AI = A$	macierz jednostkowa jest elementem neutralnym mnożenia
5.	$A(BC) = (AB)C$	mnożenie macierzy jest łączne
6.	$A(B + C) = AB + AC$	lewostronne mnożenie macierzy jest rozdzielne względem dodawania
7.	$(A + B)C = AC + BC$	prawostronne mnożenie macierzy jest rozdzielne względem dodawania
8.	$(AB)^T = B^T A^T$	transponowanie zamienia kolejność macierzy
9.	$(A^T A)^T = A^T A$	$A^T A$ jest macierzą symetryczną

Uwaga: mnożenie macierzy nie jest przemienne:
dla większości par macierzy A i B mamy $AB \neq BA$.

Przykład:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{wtedy} \quad AB = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -5 & 13 \end{bmatrix} BA = \begin{bmatrix} 10 & 14 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

15. Podmacierz macierzy A jest to macierz powstała przez wykreślenie z macierzy A pewnej liczby wierszy lub kolumn.

16. Macierz **dopełniająca** dla elementu a_{ij} macierzy kwadratowej A jest to podmacierz A_{ij} powstała przez wykreślenie z macierzy A i-tego wiersza i j-tej kolumny.

Przykład:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad A_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$