31.10.2010

Konspekt wykładu 3.

Ciągłość funkcji.

Definicja: Mówimy, że funkcja f jest ciągła w punkcie a jeśli $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Definicja: Mówimy, że funkcja f jest ciągła jeśli jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny.

Przykłady funkcji ciągłych:

x^a, a^x, $\sin x$, $\cos x$, $\log x$

$x+y$, $x-y$, xy, $\frac{x}{y}$, x^y

Fakt: Złożenie funkcji ciągłych jest ciągłe: jeśli dane są ciagłe funkcje $f(x)$ oraz $g(x)$ to funkcja $f(g(x))$ też jest ciągła.

Fakt: Licząc granice ciągów warto wiedzieć, że jeśli f jest funkcją ciągłą to dla każdego ciągu zbieżnego (czyli takiego, który ma granicę) a_n zachodzi równość granic:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n)$$

Przykład: Funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ jest ciągła podczas gdy funkcja $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ jest nieciągła w punkcje 0.

Przykład: Dla jakich wartości a, b i c poniższa funkcja jest ciągła?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{x-2} & x < 2 \\ b & x = 2 \\ x + c & x > 2 \end{cases}$$

Rozwiązanie: Zauważamy, że w otoczeniu każdego punktu różnego od 2 funkcja f jest określona za pomocą działań arytmetycznych, które są ciągłe a więc w tych punktach funkcja jest ciągła. Granica $\lim_{x\to 2} f(x)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją granice lewo- i prawo-stronne: $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ oraz $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ i są one sobie równe. Granica lewostrona $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \dfrac{x-a}{x-2}$ istnieje tylko w tedy gdy $\mathbf{a = 2}$ i wynosi ona wtedy 1. Granica prawostronna $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x+c) = 2+c$. Z równości granic jednostronnych mamy $1 = 2 + c$ czyli $\mathbf{c = -1}$. Ciągłość funkcji w punkcie 2, czyli równość $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$ daje nam $\mathbf{1 = b}$. Mamy więc rozwiązanie: $a = 2$, $b = 1$ i $c = -1$.

Uzupełnienie do poprzedniego wykładu:

Definicja: Logarytmem naturalnym nazywamy logarytm o podstawie $e = \lim_{n\to\infty} (1 - \dfrac{1}{n})^n$. Zapisujemy $\ln x = \log_e x$.

Pochodna funkcji.

Definicja: Pochodną funkcji f w punkcie a nazywamy granicę $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ o ile ta granica istnieje. Licząc powyższą granicę w każdym punkcie otrzymujemy nową funkcję f'

nazywaną pochodną funkcji f. Mamy: $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Inne oznaczenia pochodnej: $f'(x)$, $\frac{df}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$, $f'_x(x)$, $(f(x))'$... Druga pochodna jest to pochodna pochodnej: $f''(x)=(f'(x))'$.

Podstawiając $h=x-a$, granicę definiującą pochodną można zapisać jako $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Przykład: Niech $f(x)=x^2$. Wtedy $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a)}{x-a}=\lim_{x\to a}(x+a)=a+a=2a$.

Pochodną $f'(a)$ interpretujemy jako tangens kąta pomiędzy osią odciętych (poziomą) a styczną do wykresu funkcji w punkcie $(a,f(a))$. Stąd otrzyjujemy wzór na prostą styczną do wykresu funkcji w punkcie $(a,f(a))$:

$$y=f(a)+f'(a)(x-a)$$

Najważniejsze wzory:

$a'=0$
$(af(x))'=af'(x)$
$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$
$(f(x)-g(x))'=f'(x)-g'(x)$
$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
$(f(g(x)))'=f'(g(x))g'(x)$
$(f^{-1}(y))'=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

Najważniejsze pochodne:

$(x^a)'=ax^{a-1}$
$(a^x)'=a^x\ln a$
$(\sin x)'=\cos x$
$(\cos x)'=-\sin x$
$(\ln x)'=\frac{1}{x}$

Uzupełniające pochodne:

$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$
$(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$
$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$
$(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$

Przykłady:

$(3x^7)'=3\cdot 7x^6$
$(3x^5+7\cdot 2^x)'=3\cdot 5x^4+7\cdot 2^x\ln 2$
$(x^2\sqrt[3]{x^2})'=(x^{\frac{8}{3}})'=\frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}}$
$(3\sin x+5\ln x)'=3\cos x+5\cdot\frac{1}{x}$
$(x^5\sin x)'=5x^4\sin x+x^5\cos x$
$\left(\frac{x^5}{\sin x}\right)'=\frac{5x^4\sin x-x^5\cos x}{\sin^2 x}$
$(\cos x^3)'=-\sin x^3\cdot 3x^2$

$(\sqrt{x^3+2x})'=\left((x^3+2x)^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}(x^3+2x)^{\frac{1}{2}}(3x^2+2)$

$(\ln^5\sin x^7)'=5\ln^4\sin x^7\frac{1}{\sin x^7}\cos x^7\cdot 7x^6$

$(x^{\sin x})'=(e^{\ln x^{\sin x}})'=(e^{\sin x\ln x})'=e^{\sin x\ln x}(\sin x\ln x)'=e^{\sin x\ln x}(\cos x\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x})$