

Analiza matematyczna; Zestaw 8

Proszę znaleźć wielomian Taylora stopnia 3 w punkcie 0, oraz odpowiednią resztę dla następujących funkcji:

1. $f(x) = -2 + 3x + 4x^2 + 5x^3$

2. $f(x) = 4 + x + 3x^2 - 5x^3 + 2x^4$

3. $f(x) = \sin x$

4. $f(x) = \cos x$

5. $f(x) = \operatorname{tg} x$

6. $f(x) = e^x$

7. $f(x) = e^{2x}$

8. $f(x) = \sqrt{e^x}$

9. $f(x) = (1 - x)^{-1}$

10. $f(x) = (1 + x)^{-1}$

11. $f(x) = \sqrt{1 + x}$

12. $f(x) = \sqrt{1 - x}$

13. $f(x) = (1 + x)^a, \quad a \in \mathbb{R}$

14. $f(x) = \ln(1 + x)$

15. $f(x) = \ln(1 - x)$

16. $f(x) = \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$

Proszę oszacować jaki błąd popełniamy w podanych niżej przybliżeniach (proszę przyjąć oszacowanie: $2 < e < 3$)

17. $e^x \cong 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3$ dla $|x| \leq 1$

18. $\sqrt{e^x} \cong 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2^2 2!}x^2 + \frac{1}{2^3 3!}x^3$
dla $|x| \leq 1$

19. $\sin x \cong x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5$ dla $|x| \leq 1$

20. $\cos x \cong 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6$ dla $|x| \leq \frac{1}{2}$

21. $\ln(1 + x) \cong x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$
dla $|x| \leq 0.1$

22. $\sqrt{1 + x} \cong 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$ dla $|x| \leq 0.1$

Proszę obliczyć podane wartości ze wskazaną dokładnością:

23. $\sqrt{4.1}, \quad \pm 10^{-3}$

24. $\sqrt{16.5}, \quad \pm 10^{-3}$

25. $\sqrt[4]{83}, \quad \pm 10^{-3}$

26. $\sqrt[3]{127}, \quad \pm 10^{-3}$

27. $\sqrt[3]{e}, \quad \pm 10^{-4}$

28. $\sqrt{e}, \quad \pm 10^{-3}$

29. $e, \quad \pm 10^{-2}$

30. $e^{-1}, \quad \pm 10^{-2}$

31. $\ln 0.5, \quad \pm 0.05$

32. $\ln 1.5, \quad \pm 0.05$

33. $\ln 4, \quad \pm 0.5$

34. $\ln 0.9, \quad \pm 10^{-3}$

35. $\ln 1.1, \quad \pm 10^{-3}$

36. $\ln 1.21, \quad \pm 10^{-3}$