

Zadania z analizy matematycznej
przestrzenie metryczne, jednostajna ciągłość funkcji

Poniżej podano listę funkcji $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$. Proszę stwierdzić, dla których z nich zbiór X z funkcją $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ określoną jako $\rho(x, y) = |f(x) - f(y)|$ tworzy przestrzeń metryczną. Odpowiedź należy precyzyjnie uzasadnić.

W przypadkach, w których (X, ρ) jest przestrzenią metryczną należy naszkicować podaną kulę.

1. $f(x) = \frac{x}{1+5x}$, $X = [0, \infty)$, $K(1, 0.1)$.

2. $f(x) = \frac{x}{2+3x}$, $X = [0, \infty)$, $K(1, 1)$.

3. $f(x) = \frac{x}{1-x}$, $X = [0, \infty)$, $K(1, 0.2)$.

4. $f(x) = -x^2$, $X = [0, 2]$, $K(1, 0.5)$.

5. $f(x) = x^2$, $X = [-2, 2]$, $K(1, 0.5)$.

6. $f(x) = \operatorname{tg} x$, $X = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $K(0, 1)$.

7. $f(x) = x^3$, $X = (-\infty, \infty)$, $K(1, 8)$.

8. $f(x) = x(2-x)$, $X = [0, 2]$, $K(1, 0.25)$.

Proszę wskazać, które z poniższych funkcji są jednostajnie ciągłe na podanych zbiorach. Odpowiedzi należy precyzyjnie uzasadnić.

1. $f(x) = x^2$, $[-1, 1]$

2. $f(x) = x^2$, $[0, \infty)$

3. $f(x) = x^2$, $[0, 1]$

4. $f(x) = \sqrt{x}$, $[0, 1]$

5. $f(x) = \sqrt{x}$, $[1, \infty)$

6. $f(x) = \sqrt{x}$, $[0, \infty)$

7. $f(x) = \sqrt{x}$, $(0, 1)$

8. $f(x) = x^3$, $[-1, 1]$

9. $f(x) = x^3$, $(-\infty, \infty)$

10. $f(x) = x^3$, $(0, 9)$

11. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $[5, 11]$

12. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $(-\infty, \infty)$

13. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $(1, 3)$

14. $f(x) = e^x$, $(0, \infty)$

15. $f(x) = e^x$, $(9, 13)$

16. $f(x) = e^x$, $(-\infty, 0)$

17. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $(0, \pi)$

18. $f(x) = \frac{x}{1-x}$, $(0, 1)$

19. $f(x) = \frac{x+1}{3-x}$, $(0, 2)$

20. $f(x) = \frac{x-2}{4-2x}$, $(0, 2)$

21. $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$, $(-1, 0)$

22. $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$, $(-1, 1)$

23. $f(x) = \frac{x}{x^2-2x-3}$, $(0, 2)$