

EGZAMIN Z MATEMATYKI

Kierunek: Budownictwo – semestr I-szy

Uwaga: IA) $a = 2$, IIA) $a = 3$, IB) $a = 4$, IIB) $a = 5$

Należy zaznaczyć 5 zadań i tylko te będą sprawdzane!!!

Czas trwania: 90 minut

Zadanie 1. Podać definicję funkcji różnowartościowej. Zbadać różnowartościowość funkcji danej wzorem $y = f(x)$. Wyznaczyć funkcję do niej odwrotną, jeśli jest to funkcja różnowartościowa.

$$f(x) = \frac{1+ae^x}{1-8e^x}.$$

Zadanie 2. Sformułować twierdzenie o trzech ciągach. Wyznaczyć granicę ciągu

$$a_n = \sqrt[5n+6]{5^{an-2} + 1}.$$

Zadanie 3. Podać definicję liczby Eulera. Wyznaczyć granicę ciągu

$$a_n = \left(\frac{an-7}{an+2}\right)^{3n+2}.$$

Zadanie 4. Sformułować twierdzenie Kroneckera-Capelli. Znaleźć bazę przestrzeni rozwiązań podanego układu równań. Czy wektor $[-2, 1, 0, 0]$ jest elementem tej przestrzeni? Jeśli jest, to wyznaczyć jego rozkład w znalezionej bazie.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 + ax_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Zadanie 5. Obliczyć wyznacznik $\det(AB)$, jeśli:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 2a & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 9 & 10 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & a \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 6. Podać definicję rozkładu własnego macierzy. Znaleźć rozkład własny macierzy

$$\begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -4 & -1 & a \end{bmatrix}.$$

Zadanie 7. Sformułować twierdzenie o pochodnej funkcji złożonej. Obliczyć pochodną $\left(\sqrt[7]{1 + 3 \ln(ax - 1)}\right)'$.