

Matematyka – Budownictwo I rok
Zadania do samodzielnego rozwiązania

Seria IV

1. Wyznaczyć rozkład wektora x w podanej bazie:

a) $x = [3, 2, 1]$, baza w R^3 : $[1, 1, 1], [1, -1, 1], [1, 0, 2]$,

b) $x = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, baza w $R^{2 \times 2}$: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Zbadać które z poniższych odwzorowań jest liniowe. Jeśli f jest liniowe znaleźć macierz odwzorowania f w bazach standardowych.:

a) $f(x_1, x_2) = (2x_1 - 3x_2, 2x_1 + 3x_2, -3x_2, 2x_1)$, b) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = ((x_1 - x_2)^2, x_1, -x_2, 0)$.

c) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_1, x_1 - 3x_2, 2x_1 + x_2)$, d) $f(x_1, x_2) = 3x_1 - x_2 + 1$.

3. Zbadać które z poniższych odwzorowań jest izomorfizmem liniowym:

a) $f(x_1, x_2) = (x_1 - 3x_2, 2x_1 + 7x_2, x_1 - 3x_2, x_1)$, b) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2, x_2, 2x_1)$.

c) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_1, 5x_1 - 3x_2, 2x_1 + x_2)$. d) $f(x_1, x_2) = 5x_1 - 3x_2$.

4. Znaleźć macierz odwzorowania f w podanych bazach:

a) $f(x_1, x_2) = (x_1 - 3x_2, 2x_1 + 7x_2, x_1 - 3x_2, x_1)$,

baza w R^2 : $\alpha_1 = [1, 0]$, $\alpha_2 = [2, 1]$,

baza w R^3 : $\beta_1 = [1, 0, 0]$, $\beta_2 = [2, 1, 0]$, $\beta_3 = [2, 1, 1]$,

b) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 3x_2, x_1 + 7x_2)$,

baza w R^3 : $\beta_1 = [1, 0, 0]$, $\beta_2 = [-2, 1, 0]$, $\beta_3 = [-2, 1, 2]$,

baza w R^2 : $\alpha_1 = [1, 0]$, $\alpha_2 = [-1, 1]$.

5. Wyznaczyć wektory i wartości własne oraz rozkład własny macierzy kwadratowej :

a) $\begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, a) $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

6. Obliczyć pochodne :

a) $[\arcsin(1 + 5e^{3x-1})]'$, b) $[\sqrt[5]{7x + 5\ln(3x-2)}]'$, c) $[\ln(1 + \sqrt[7]{3x + 5e^{3x+7}})]'$,

d) $[x^{\sin(3x+5)}]'$, e) $[x + 5\sqrt[7]{3x + 7e^{3x^2+7x-2}}]'$, f) $[\ln(1 + x^{\sqrt[3]{3x+2e^{3x+7}}})]'$.

d) $[(2x+1)x^{\sin(3x+5)}]'$, e) $[e^{-2x}(3x+7)]'$, f) $\left[\frac{\ln(x^x - 1)}{\ln(x^x + 1)} \right]'$.

7. Bezpośrednio z definicji pochodnej wyznaczyć $f'(5)$, jeśli :

a) $f(x) = \sin(3\pi(x+1/4))$, b) $f(x) = 5x^2 + \sqrt{x}$, c) $f(x) = e^{7x+2} + \sqrt[3]{x}$

8. Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej wyznaczyć pochodne funkcji odwrotnych do funkcji.:

a) $f(x) = \arcsin\left(\frac{3x-2}{x+6}\right)$, b) $f(x) = \frac{5x+1}{3x-5}$, c) $f(x) = \frac{5\sqrt{x}+1}{5-3\sqrt{x}}$, d) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{5\ln x + 3}{15 - 2\ln x}$.