Definicja (exponent Lapunova)

Jeśli $A \in R^{n\times n}$, to exponentem Lapunova macierzy A nazwiemy macierz

$$e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$$

Uwaga

Jeśli $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$, to rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego dla układu równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu o stałych współczynnikach

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dot{x}_1 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots. \\ \dot{x}_{n1} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

Z warunkami początkowymi $x_1(0) = x_{o1}, \quad x_2(0) = x_{o2}, \quad x_n(0) = x_{on},$ może być zapisane w postaci

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) & \dots & b_{1n}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) & & b_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}(t) & b_{n2}(t) & \dots & b_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{o1} \\ x_{o2} \\ \dots \\ x_{on} \end{bmatrix}$$

gdzie macierz $B(t) = (b_{ij}(t)) \in R^{n\times n}$ jest exponentem Lapunova macierzy A,

tzn. $B = e^{tA}$.

Przykład

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

$$x_1(0) = x_{o1} = 2, \quad x_2(0) = x_{o2} = 3$$

1 sposób.

$$\begin{cases} x_2 = \dot{x}_1 - 2x_1 \\ (\dot{x}_1 - 2x_1)' = -x_1 + 2(\dot{x}_1 - 2x_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = \dot{x}_1 - 2x_1 \\ \ddot{x}_1 - 4\dot{x}_1 + 5x_1 = 0 \end{cases}$$

$$r^2 - 4r + 3 = (r-2)^2 + 1 = 0$$

$$r_1 = 2 + i, \quad r_2 = 2 - i,$$

CORJ: $x_1 = C_1 e^{2t}\cos t + C_2 e^{2t}\sin t$

COUJ:

$$\begin{aligned}
&x_1 = C_1 e^{2t}\cos t + C_2 e^{2t}\sin t \\
&x_2 = \dot{x}_1 - 2x_1 = (C_1 e^{2t}\cos t + C_2 e^{2t}\sin t)' - 2(C_1 e^{2t}\cos t + C_2 e^{2t}\sin t) = \\
&= 2C_1 e^{2t}\cos t + 2C_2 e^{2t}\sin t - C_1 e^{2t}\sin t + C_2 e^{2t}\cos t - 2C_1 e^{2t}\cos t - 2C_2 e^{2t}\sin t = \\
&= [C_2\cos t - C_1\sin t]e^{2t}
\end{aligned}$$

Realizacja warunków początkowych:

$$x_1(0) = x_{o1} = 2, \quad x_2(0) = x_{o2} = 3$$

$$\begin{aligned} x_{o1} &= C_1 \\ x_{o2} &= C_2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 &= x_{o1}e^{2t}\cos t + x_{o2}e^{2t}\sin t \\ x_2 &= x_{o2}e^{2t}\cos t - x_{o1}e^{2t}\sin t \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t}\cos t & e^{2t}\sin t \\ -e^{2t}\sin t & e^{2t}\sin t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{o1} \\ x_{o2} \end{bmatrix}$$

Wniosek: $$e^{t\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} e^{2t}\cos t & e^{2t}\sin t \\ -e^{2t}\sin t & e^{2t}\sin t \end{bmatrix}$$

2 sposób.

Wykorzystanie wektorów i wartości własnych macierzy A

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad (*)$$

Pytanie: Dla jakiego parametru r i jakich stałych macierzy kolumnowych $[C_1, C_2]^T$ macierz kolumnowa $[C_1, C_2]^T e^{rt}$ jest całką szczególną (*)? $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$D\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = D^{-1}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Znajdziemy macierz D tak, by macierz

$$\Delta = D^{-1}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} D$$

Miała prostą postać, np. postać diagonalną. Nie zawsze taka postać da się znaleźć, ale, jeśli są dwie różne wartości własne, jest ok. Oto sposób jej znalezienia:

Szukamy wartości własnych macierzy układu

$$\det\begin{bmatrix} 2-r & 1 \\ -1 & 2-r \end{bmatrix} = (2-r)^2 + 1 = 0 \qquad r = r_1 = 2+i \quad \text{lub} \quad r = r_2 = 2-i$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} 2-r & 1 \\ -1 & 2-r \end{bmatrix} = (2-r)^2 + 1, \quad r_1 = 2+i, \quad r_2 = 2-i,$$

Wektory własne: $\begin{bmatrix} 2-r & 1 \\ -1 & 2-r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$r_1 = 2+i$:

$$\begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} -iC_1 + C_2 = 0 \\ -C_1 - iC_2 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} C_1 = \alpha \\ C_2 = i\alpha \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \quad \alpha = const.$$

$r_1 = 2-i$:

$$\begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} iC_1 + C_2 = 0 \\ -C_1 + iC_2 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} C_1 = \beta \\ C_2 = -i\beta \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \beta\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}, \quad \beta = const.$$

Unormowanie wektorów własnych:

$$\| \alpha[1,i] \| = |\alpha| \, [1,i]^* \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = |\alpha| \, [1,-i]^T \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = |\alpha| \sqrt{2} = 1$$

$$| \beta[1,i] \| = |\beta| \, [1,i]^* \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = |\beta| \, [1,-i]^T \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = |\beta| \sqrt{2} = 1$$

$$|\alpha| = |\beta| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Macierz D budujemy ustawiając w jej kolumnach unormowane wektory własne; wtedy macierz diagonalna Δ ma na głównej przekątnej wartości własne ustawione w takiej samej kolejności jak unormowane wektory własne w macierzy D (wtedy macierz D jest hermitowska a więc $D^{-1} = D^* = \overline{D}^T$:

$$D=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{i}{\sqrt{2}} & \dfrac{-i}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} \qquad D^*=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{-i}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{i}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

Nietrudno się teraz przekonać, że

$$D^*AD=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2}\end{bmatrix}^*\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(2+i)/\sqrt{2} & (2-i)/\sqrt{2}\\ (-1+2i)/\sqrt{2} & (-1-2i)/\sqrt{2}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}[(2+i)-i(-1+2i)]/2 & [(2-i)-i(-1-2i)]/2\\ [(2+i)+i(-1-2i)]/2 & [(2-i)+i(-1-2i)]/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+i & 0\\ 0 & 2-i\end{bmatrix}$$

Teraz wystarczy rozwiązać układ równań:

$$\begin{bmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+i & 0\\ 0 & 2-i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix} \qquad \begin{cases}\dot{y}_1=(2+i)y_1\\ \dot{y}_2=(2-i)y_2\end{cases} \qquad \begin{cases}y_1=e^{(2+i)t}y_{o1}\\ y_2=e^{(2+i)t}y_{o2}\end{cases}$$

Zatem:

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=D\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{i}{\sqrt{2}} & \dfrac{-i}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{(2+i)t}y_{o1}\\ e^{(2-i)t}y_{o12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{i}{\sqrt{2}} & \dfrac{-i}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{(2+i)t} & 0\\ 0 & e^{(2-i)t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_{o1}\\ y_{o12}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{i}{\sqrt{2}} & \dfrac{-i}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{(2+i)t} & 0\\ 0 & e^{(2-i)t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{i}{\sqrt{2}} & \dfrac{-i}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}x_{o1}\\ x_{o12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{i}{\sqrt{2}} & \dfrac{-i}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{(2+i)t} & 0\\ 0 & e^{(2-i)t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{-i}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{i}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{o1}\\ x_{o12}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{(2+i)t} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{(2-i)t}\\ \dfrac{i}{\sqrt{2}}e^{(2+i)t} & \dfrac{-i}{\sqrt{2}}e^{(2-i)t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{-i}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{i}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{o1}\\ x_{o12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{2}[e^{(2+i)t}+e^{(2-i)t}] & -\dfrac{1}{2}i[e^{(2+i)t}-e^{(2-i)t}]\\ \dfrac{1}{2}i[e^{(2+i)t}-e^{(2-i)t}] & \dfrac{1}{2}[e^{(2+i)t}+e^{(2-i)t}]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{o1}\\ x_{o12}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{2}e^{2t}\cos t & \dfrac{1}{2}e^{2t}\sin t\\ -\dfrac{1}{2}e^{2t}\sin t & \dfrac{1}{2}e^{2t}\cos t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{o1}\\ x_{o12}\end{bmatrix}$$

Wniosek: $$e^{t\begin{bmatrix}2 & 2\\ -1 & 2\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}e^{2t}\cos t & e^{2t}\sin t\\ -e^{2t}\sin t & e^{2t}\sin t\end{bmatrix}$$