Każde zadanie – 10pkt. Nie wolno używać kalkulatorów, tablic ani innych notatek. Wszelkie pytania należy kierować **wyłącznie** do osoby prowadzącej kolokwium.

17.07.2009

Egzamin z Analizy Matematycznej
semestr drugi

r o z w i ą z a n i a

Zadanie 1. Proszę obliczyć całki nieoznaczone:

(a) $\int x\cos(x^2+1)dx$

podstawiamy $y = x^2+1$ wtedy $dy = 2xdx$ czyli $xdx = \frac{1}{2}dy$ i otrzymujemy:
$\int \cos y \frac{1}{2}dy = \frac{1}{2}\sin y + C = \frac{1}{2}\sin(x^2+1)+C$

(b) $\int x\cos(x+1)dx$

całkujemy przez części: $u = x$, wtedy $u' = 1$ oraz $v' = \cos(x+1)$, wtedy $v = \sin(x+1)$. Otrzymujemy:
$\int uv'dx = uv - \int u'vdx = x\sin(x+1) - \int 1\cdot\sin(x+1)dx =$
$= x\sin(x+1) - (-\cos(x+1)) + C = x\sin(x+1) + \cos(x+1) + C.$

Zadanie 2. Proszę znaleźć objętość przestrzeni zamiecionej przez obrót wokół osi OY obszaru ograniczonego krzywymi: $y = 2-x^2$ i $y = 1$.

Znajdujemy punkty wspólne ktrzywych $y = 2-x^2$ i $y = 1$:
$2-x^2 = 1$ daje $x^2 = 1$ czyli $x = -1$ lub $x = 1$. Obszar leży nad odcinkiem $[-1,1]$. Przestrzeń zamieciona przez obszar leżący nad $[-1,0]$ pokrywa się z przestrzenią zamiecioną przez obszar leżący nad $[0,1]$, czyli objętość możemy znaleźć ze znanego wzoru podstawiając $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = 2-x^2$ i $g(x) = 1$:
$V = \int_a^b 2\pi x(f(x)-g(x))dx = \int_0^1 2\pi x(2-x^2-1)dx = 2\pi\int_0^1 x - x^3dx =$
$= 2\pi(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4)\Big|_0^1 = 2\pi(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}) - 2\pi(0-0) = \frac{1}{2}\pi$

Zadanie 3. Proszę znaleźć długość krzywej $h(t) = (2t, t^2, \frac{1}{3}t^3)$, $x \in [1,3]$.

$L = \int_a^b dL$, $dL = \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}dt$.
$L = \int_1^3 \sqrt{2^2+(2t)^2+(t^2)^2}dt = \int_1^3 \sqrt{4+4t^2+t^4}dt = \int_1^3 \sqrt{2+t^2}dt =$
$= \int_1^3 2+t^2dt = 2t + \frac{1}{3}t^3\Big|_1^3 = 12\frac{2}{3}.$

Zadanie 4. Proszę znaleźć i scharakteryzować lokalne ekstrema funkcji $f(x,y) = -x^4 - y^4 + 2x^2 + 2y^2 + 4xy$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -4x^3 + 4x + 4y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -12x^2 + 4$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -4y^3 + 4y + 4x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -12y^2 + 4$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4$$

$$D^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} -12x^2 + 4 & 4 \\ 4 & -12y^2 + 4 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{grad} f = 0 \iff \begin{cases} -4x^3 + 4x + 4y = 0 \\ -4y^3 + 4y + 4x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x^3 + x + y = 0 \\ -y^3 + y + x = 0 \end{cases}$$

Odejmując stronami mamy: $-x^3 + y^3 = 0$ czyli $x^3 = y^3$ a więc z różnowartościowości fukcji $x \mapsto x^3$ mamy $x = y$. Układ równań daje więc $x^3 - 2x = 0$ czyli $x(x^2 - 2) = 0$ czyli $x = 0$ lub $x = \sqrt{2}$ lub $x = -\sqrt{2}$. Otrzymujemy trzy punkty stacjonarne: $(0,0)$, $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ i $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

$D^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ $\det A_1 = 4 > 0$ $\det A_2 = 0$ macierz nieujemnie określona.

$D^2 f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{bmatrix} -20 & 4 \\ 4 & -20 \end{bmatrix}$ $\det A_1 = -20 < 0$ $\det A_2 = 384 > 0$ macierz ujemnie określona

$D^2 f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} -20 & 4 \\ 4 & -20 \end{bmatrix}$ $\det A_1 = -20 < 0$ $\det A_2 = 384 > 0$ macierz ujemnie określona

Odpowiedź: funkcja f ma 3 punkty stacjonarne: punkt $(0,0)$ nie jest lokalnym maksimum i nie da się go dokładniej scharakteryzować na podstawie $D^2 f$. W punktach $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ i $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ funkcja osiąga lokalne maksima.

Zadanie 5. Proszę znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x,y) = 2x - 3y$ na zbiorze $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 + 2x + 4y - 8 \leq 0\}$.

Badamy punkty stacjonarne wewnątrz obszaru D:
$\operatorname{grad} f = 0 \iff (2,3) = 0$. Ten warunek nie jest nigdy spełniony więc funkcja nie ma punktów stacjonarnych we wnętrzu obszaru D.

Badamy punkty nielagrangeowskie na brzegu obszaru D:
Brzeg obszaru D jest opisany warunkiem $g(x,y) = 0$,
gdzie $g(x,y) = x^2 + y^2 + 2x + 4y - 8$.

$$\operatorname{grad} g = 0 \iff (2x + 2, 2y + 4) = 0 \iff \begin{cases} 2x + 2 = 0 \\ 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

Czyli $(x,y) = (-1,-2)$. $g(-1,-2) = -8 \neq 0$ czyli punkt $(-1,-2)$ nie należy do brzegu D: brzeg D jest zbiorem Lagrange'a.

Badamy warunkowe punkty stacjonarne na brzegu obszaru D:

Szukamy punktów stacjonarnych funkcji
$F(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = 2x - 3y - \lambda(x^2 + y^2 + 2x + 4y - 8)$
$\operatorname{grad} F = (2 - 2\lambda x - 2\lambda, -3 - 2\lambda y - 4\lambda)$
Otrzymujemy warunki:
$\begin{cases} 2 - 2\lambda x - 2\lambda = 0 \\ -3 - 2\lambda y - 4\lambda = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x + 4y - 8 = 0 \end{cases}$
Pierwsze dwa równania są równoważne warunkowi $\operatorname{grad} F = 0$, trzecie równanie opisuje brzeg obszaru D. Z pierwszego równania wyliczamy
$\lambda = \frac{1}{x+1}$
wstawiając do drugiego otrzymujemy:
$-3 - 2\frac{1}{x+1}y - 4\frac{1}{x+1} = 0$
$3(x + 1) + 2y + 4 = 0$
$3x + 2y + 7 = 0$
$y = -\frac{7+3x}{2}$
wstawiamy do trzeciego równania:
$x^2 + \left(-\frac{7+3x}{2}\right)^2 + 2x + 4\left(-\frac{7+3x}{2}\right) - 8 = 0$
$4x^2 + 49 + 42x + 9x^2 + 8x - 56 - 24x - 32 = 0$
$13x^2 + 26x - 39 = 0$
$x^2 + 2x - 3 = 0$
$x = -3$ lub $x = 1$.
Dostaliśmy dwa warunkowe punkty stacjonarne: $(-3, 1)$ oraz $(1, -5)$.
$f(-3, 1) = -9$, $f(1, -5) = 17$. f osiąga na zbiorze D minimum w punkcie $(-3, 1)$ oraz maksimum w punkcie $(1, -5)$.

Zadanie 6. Proszę obliczyć całkę

$$\iint_D \frac{(x - 3y)^2}{(x + y)^3} dxdy$$

po zbiorze $D = \{(x, y) : 0 \le x - 3y \le 2 \text{ oraz } 1 \le x + y \le 3\}$

Stosujemy wzór na całkę przez podstawienie

$$\iint_D f(g(x, y))|\det Dg| dxdy = \iint_{g(D)} f(u, v) dudv$$

Podstawiamy $u = x - 3y$ i $v = x + y$, czyli $(u, v) = g(x, y) = (x - 3y, x + y)$, gdzie $0 \le u \le 2$ oraz $1 \le v \le 3$,
$Dg = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ czyli $|\det Dg| = 4$ otrzymujemy:
$\iint_D \frac{(x - 3y)^2}{(x + y)^3} \cdot 4 \cdot dxdy = \iint_{g(D)} \frac{u^2}{v^3} dudv = \int_1^3 \int_0^2 u^2 v^{-3} dudv =$
$= \int_0^2 u^2 du \int_1^3 v^{-3} dv = \frac{1}{3}u^3\Big|_0^2 (-\frac{1}{2}v^{-2})\Big|_1^3 = (\frac{8}{3} - 0)(-\frac{1}{18} + \frac{1}{2}) = \frac{32}{27}.$

Dzieląc skrajne wyrażenia przez 4 otrzymujemy:

$$\iint_D \frac{(x-3y)^2}{(x+y)^3} dxdy = \frac{8}{27}$$

Zadanie 7. Proszę znaleźć masę płyty $D = [1, 2] \times [0, 1]$ o gęstości $\rho(x, y) = 1 + x$.

Masa płyty jest to gęstość razy powierzchnia, ogólnie jest to całka gęstości po powierzchni, czyli:

$M = \iint_D \rho(x, y) dxdy = \int_0^1 \int_1^2 1 + x \; dxdy = \int_1^2 1 + x \; dx \int_0^1 dy =$

$= x + \frac{1}{2}x^2 \Big|_1^2 y \Big|_0^1 = (4 - \frac{3}{2})(1 - 0) = 2\frac{1}{2}$

Uwaga: całka wewnętrzna nie zależy od y, stąd jako stałą mogliśmy ją wyciągnąć przed całkę po y. Podobnie postąpiliśmy w rozwiązaniu zadania 6.