

Proszę obliczyć następujące granice:

- | | | | |
|--|---|---|---|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$ | 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$ | 8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 x}{x}$ | 12. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$ |
| 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x}$ | 5. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$ | 9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^3}$ | 13. $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}}$ |
| 3. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \ln x \right)$ | 6. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x}$ | 10. $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$ | |
| | 7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$ | 11. $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$ | 14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}$ |

Dla następujących funkcji proszę znaleźć wartość największą i najmniejszą (jeśli nie istnieją wtedy odpowiednio kres górny i dolny), lokalne ekstrema, przedziały monotoniczności i naszkicować wykres:

- | | |
|---|---|
| 15. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 3, \quad x \in [0, 3]$ | 32. $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 1}{x - 3}, \quad x \in (7, 12]$ |
| 16. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 45x + 7, \quad x \in [-6, 6]$ | 33. $f(x) = \cos x + x, \quad x \in \mathbb{R}$ |
| 17. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 45x + 7, \quad x \in (-10, 10)$ | 34. $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}), \quad x \in \mathbb{R}$ |
| 18. $f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 5, \quad x \in \mathbb{R}$ | 35. $f(x) = x^2 e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}$ |
| 19. $f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 5, \quad x \in [-4, 4]$ | 36. $f(x) = \frac{x}{\ln x}, \quad x \in (0, \infty)$ |
| 20. $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + 5, \quad x \in [-3, 3]$ | 37. $f(x) = 2x^3 - x^2, \quad x \in (-3, 3)$ |
| 21. $f(x) = 2x + \ln x + 3, \quad x \in [2, \infty)$ | 38. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5, \quad x \in [-2, 2]$ |
| 22. $f(x) = x^2 - 8x + 6 \ln x + 4, \quad x \in [\frac{1}{2}, 4]$ | 39. $f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}, \quad x \in [0, 4]$ |
| 23. $f(x) = x^2 - 14x + 20 \ln x + 1, \quad x \in (1, 6)$ | 40. $f(x) = \sqrt{100 - x^2}, \quad x \in [-6, 8]$ |
| 24. $f(x) = x^2 - 10x + 2 \ln x^4 + 3, \quad x \in [\frac{1}{2}, 5]$ | 41. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1 - x}{1 + x}, \quad x \in [0, 1]$ |
| 25. $f(x) = x - e^x + 2, \quad x \in [-1, 1]$ | 42. $f(x) = x - \ln(1 + x), \quad x \in (-1, \infty)$ |
| 26. $f(x) = e^2 x - e^x + 4, \quad x \in [-3, 3]$ | 43. $f(x) = x - \ln(1 + x^2), \quad x \in \mathbb{R}$ |
| 27. $f(x) = 2x^2 - \ln x, \quad x \in (0, \infty)$ | 44. $f(x) = x \sin x + \cos x - \frac{x^2}{4}, \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ |
| 28. $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 3}, \quad x \in [4, 10]$ | 45. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 8}, \quad x \in \mathbb{R}$ |
| 29. $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 3}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ | 46. $f(x) = x^2 - 3x + 2 , \quad x \in [0, 3]$ |
| 30. $f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 2}{x - 1}, \quad x \in [2, 6]$ | 47. $f(x) = x^2 - 5x + 6 , \quad x \in [0, 4]$ |
| 31. $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 3}, \quad x \in [6, 10]$ | |

1. Jaki prostokąt o obwodzie 36 cm ma najkrótszą przekątną?
2. Ze wszystkich trójkątów, dla których suma wysokości i podstawy jest równa b wybrać trójkąt o największym polu.
3. W okrąg o promieniu R wpisano trapez, którego podstawą jest średnica okręgu. Dla jakiego kąta przy podstawie trapezu pole trapezu jest największe?
4. Na paraboli $y^2 = 4x$ znaleźć punkt leżący najbliżej prostej o równaniu $y = 2x + 4$. *Uwaga: najprostsze rozwiązanie tego zadania nie polega na badaniu ekstremów funkcji.*
5. Dany jest prostopadłościan o podstawie kwadratowej i powierzchni bocznej P . Jakie powinien mieć wymiary by jego objętość była największa.
6. Dane jest pudełko w kształcie prostopadłościanu o podstawie kwadratowej, bez wieczka. Powierzchnia boczna pudełka wynosi P . Jakie powinno mieć wymiary by jego objętość była największa.
7. Ze wszystkich stożków o danej tworzącej l wybrać ten, który ma największą objętość.
8. Znaleźć stosunek R/H promienia podstawy do wysokości walca, mającego przy danej objętości V najmniejszą powierzchnię całkowitą.
9. Stoimy w odległości 5 km od prostoliniowej szosy i 13 km od domu stojącego przy tej szosie. Jaki jest minimalny czas dojścia do domu jeśli w terenie poruszamy się z prędkością 3 km/h a po szosie z prędkością 5 km/h?
10. Statek pływa od portu do portu. Koszt ruchu statku składa się z dwóch części: niezależnej od prędkości i równej 25000 zł dziennie oraz zależnej od prędkości i równej (liczbowo, dziennie) sześciastokrotności prędkości wyrażonej w km/h. Przy jakiej prędkości koszt przepłynięcia trasy jest najmniejszy?