

Analiza matematyczna, zjazd 5; 15.11.2008

Rozwiązania zadań wskazanych do oceny proszę oddać dnia 29.11.2008.

1. Jaki prostokąt o obwodzie 36 cm ma najkrótszą przekątną?
2. Ze wszystkich trójkątów, dla których suma wysokości i podstawy jest równa b wybrać trójkąt o największym polu.
3. W okrąg o promieniu R wpisano trapez, którego podstawą jest średnica okręgu. Dla jakiego kąta przy podstawie trapezu pole trapezu jest największe?
4. Na paraboli $y^2 = 4x$ znaleźć punkt leżący najbliżej prostej o równaniu $y = 2x + 4$.
5. Dany jest prostopadłościan o podstawie kwadratowej i powierzchni bocznej P . Jakie powinien mieć wymiary by jego objętość była największa.
6. Dane jest pudełko w kształcie prostopadłościanu o podstawie kwadratowej, bez wieczka. Powierzchnia boczna pudełka wynosi P . Jakie powinno mieć wymiary by jego objętość była największa.
7. Ze wszystkich stożków o danej tworzącej l wybrać ten, który ma największą objętość.
8. Znaleźć stosunek R/H promienia podstawy do wysokości walca, mającego przy danej objętości V najmniejszą powierzchnię całkowitą.
9. Stoimy w odległości 5 km od prostoliniowej szosy i 13 km od domu stojącego przy tej szosie. Jaki jest minimalny czas dojścia do domu jeśli w terenie poruszamy się z prędkością 3 km/h a po szosie z prędkością 5 km/h?
10. Statek pływa od portu do portu. Koszt ruchu statku składa się z dwóch części: niezależnej od prędkości i równej 25000 zł dziennie oraz zależnej od prędkości i równej (liczbowo, dziennie) sześciastemu potęgowi prędkości wyrażonej w km/h. Przy jakiej prędkości koszt przepełnienia trasy jest najmniejszy?
11. Dla metryk na płaszczyźnie:
 $d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$
 $d_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$
 $d_\infty((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$
znaleźć odległości pomiędzy parami punktów:
a) $(1, 1)$ i $(2, 3)$ b) $(2, -1)$ i $(2, 1)$ c) $(0, 3)$ i $(1, 4)$
12. Dla metryk z zadania 11 naszkicować kule o środku p i promieniu r :
a) $p = (1, 1)$ i $r = 1$ b) $p = (3, 5)$ i $r = 3$ c) $p = (-1, 0)$ i $r = 2$
13. Dla metryk z zadania 11 podać przykład punktu równo oddalonego od obu punktów z przykładów a-c.
14. Znaleźć odległość w metryce supremum $d(f, g) = \sup |f(x) - g(x)|$ pomiędzy następującymi parami funkcji:
a) $f, g : (0, 3) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$, $g(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$
b) $f, g : [0, 8] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, $g(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 8$
c) $f, g : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 3$, $g(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 3$
d) $f, g : (1, 6) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 8$, $g(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 7$
e) $f, g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$, $g(x) = e^x$
f) $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 3)e^{-x}$, $g(x) = 3e^{-x}$
g) $f, g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 1) \ln x$, $g(x) = \ln x$
14. Podać przykład funkcji h takiej, że $d(h, f) = d(h, g)$, jeśli $f(x) = x^2 + 1$ i $g(x) = e^x$.

Na następnych zajęciach – 29.11.2008 odbędzie się kolokwium 2.